Analysis 1
10. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
12. Januar 2011

Aufgabe 1 Konvergenz

Gegeben sei die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{1+n^2}{3n^2+15n}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge gegen $\frac{1}{3}$ konvergiert, indem Sie exakt mit der Definition für konvergente Folgen arbeiten.

Aufgabe 2 Divergenz

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge in X. Formulieren Sie, was es heißt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, indem Sie die Definition von Konvergenz aus der Vorlesung negieren.

Nun betrachten wir den Spezialfall $X = \mathbb{R}$ mit der durch den Betrag erzeugten Metrik und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \begin{cases} 1 & n \text{ ist eine Primzahl} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, indem Sie Ihre Bedingung aus (a) nachweisen.

Aufgabe 3 Gleichwertige Definitionen für Konvergenz

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x.

(2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$

(3) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : d(x_n, x) < \varepsilon.$

(4) $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : d(x_n, x) < \frac{1}{m}.$

Aufgabe 4 Konvergente Folgen in normierten Räumen

Es sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{C}^n$ konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann durch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := ||x_n||$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge definiert ist.
Folgt umgekehrt aus der Konvergenz der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.