

Analysis 1

9. Tutorium



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
15. Dezember 2010

Aufgabe 1

- a) Bestimmen Sie den Abstand $|z_1 - z_2|$ zwischen den beiden komplexen Zahlen $z_1 := 4 + i$ und $z_2 := -2 + 9i$.
- b) Zeichnen Sie folgende Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene. Verwenden Sie dazu keinen Taschenrechner. Schreiben Sie die Zahlen anschließend in Polarform:

$$1 + i, \quad \frac{1 + i}{1 - i}, \quad \frac{(1 - i)^3}{(1 + i)^5}.$$

- c) Skizzieren Sie jeweils die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene, die folgenden Bedingungen genügen:

$$|z| \leq 1, \quad 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1, \quad |z - 3| = 2, \quad |5 - z| < |z - 3i|.$$

Aufgabe 2

Bereits Euler stellte folgende Rechnung zur Diskussion:

$$-2 = \sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{4} = 2.$$

Was ist hier passiert?

Aufgabe 3 Parallelogrammgleichung

Zeigen Sie: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot |w|^2.$$

Woher hat diese sog. *Parallelogrammgleichung* ihren Namen?

Aufgabe 4 Reelle Potenzen

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. In der Vorlesung wurde für eine rationale Zahl p die p -te Potenz a^p definiert. Wie würden Sie $a^{\sqrt{2}}$ (oder allgemeiner a^x für $x \in \mathbb{R}$) definieren? Was müssten Sie dafür zeigen? Sie brauchen die Beweise erst führen, wenn am Ende des Blattes noch Zeit ist.

Aufgabe 5 Grenzen der Körpererweiterungen

Ein Student der Vorlesung Analysis 1 hat gelernt: „Wenn eine Gleichung in einem Ring oder einem Körper keine Lösung besitzt, muss man einfach den Ring oder den Körper um die Lösung erweitern.“

Er hat sich schon immer darüber geärgert, dass man nicht durch Null teilen darf, das heißt, $0 \cdot x = a$ besitzt in \mathbb{R} keine Lösung. Er beschließt daher, den Körper \mathbb{R} um diese Lösung zu erweitern.

Diskutieren Sie die Erfolgsaussichten.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und
ein gutes neues Jahr!

Burkhard Kümmerer, Walter Reußwig, Kay Schwieger