Analysis 1
8. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
8. Dezember 2010

Aufgabe 1 Die komplexe Konjugation

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir die komplex konjugierte Zahl $\overline{x + iy} := x - iy$. Damit erhalten wir eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Abbildung, die *komplexe Konjugation*. Seien nun $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(b) Es gilt $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(c) Die komplexe Konjugation ist ein Körperautomorphismus auf $\mathbb{C}$, welcher jede reelle Zahl fix lässt: Es gilt also $\overline{x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z \cdot \overline{z} \in [0, \infty[$.

(e) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $0 \leq k \leq n$. Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von f.

(f) Es gibt genau zwei Körperautomorphismen von $\mathbb{C}$, die jede reelle Zahl fix lassen.

Hinweis: Warum ist es in Aufgabenteil (f) entscheidend, für solch einen Körperautomorphismus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das Bild von i zu betrachten?

Aufgabe 2 Komplexe Einheitswurzeln

Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl. Wir definieren die Menge aller komplexen Zahlen, die die Gleichung $x^n - 1 = 0$ lösen:

$$Z_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

(a) Bestimmen Sie Z_3, indem sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass Z_n eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ bildet.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $z \in Z_n$ gilt: $z^{-1} = \overline{z}$.

Aufgabe 3 Unendlichkeit

Sei X eine Menge. Wir nennen X eine *abzählbare Menge*, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt. Das heißt, es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Zeigen Sie, dass das reelle Intervall $]0,1[$ **nicht** abzählbar ist.

Hinweis: Starten Sie mit einer abzählbaren Teilmenge E, bzw. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in $]0,1[$ und konstruieren Sie nun eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_0 \subseteq]0,1[$ und $E \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \emptyset$.