Analysis 1
7. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
1. Dezember 2010

Aufgabe 1 Schnitt von Intervallen

Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{K}$ heißt *Intervall*, falls für alle $x, z \in I$ mit $x \leq z$ und alle $y \in \mathbb{K}$ gilt:

$$x \leq y \leq z \qquad \Longrightarrow \qquad y \in I\ .$$

a) Zeigen Sie: Für zwei Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{K}$ ist der Schnitt $I \cap J$ wieder ein Intervall.

b) Machen Sie sich klar, dass in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alle Intervalle $I \neq \mathbb{R}$ eine der folgenden Formen mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzen:

$$\begin{array}{llll} [a,b]\ , & [a,b[\ , &]a,b]\ , &]a,b[\ , \\ [a,\infty[\ , &]a,\infty[\ , &]-\infty,b]\ , &]-\infty,b[\ . \end{array}$$

Aufgabe 2 Infimum und Supremum

Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{K}$. Wir setzen $-M := \{-x \mid x \in M\}$. Zeigen Sie: M ist genau dann nach unten beschränkt, wenn $-M$ nach oben beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\inf(M) = -\sup(-M)\ .$$

Aufgabe 3

Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein angeordneter Körper mit folgender Eigenschaft:

Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{K}$ eine nach oben beschränkte Mengen, so besitzt M ein Supremum in $\mathbb{K}$.

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{K}, \leq)$ das archimedische Axiom erfüllt.

Aufgabe 4

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen, so dass $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt. Zeigen Sie:

a) $\sup(A) \leq \inf(B)$.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\sup(A) = \inf(B)$.
2. Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $b - a < \varepsilon$.