Analysis 1
6. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
24. November 2010

Aufgabe 1 Elementare Ungleichungen in angeordneten Körpern

Es sei $(\mathbb{K}; \leq)$ ein angeordneter Körper. Seien im folgenden $a, b, x, y \in \mathbb{K}$ Körperelemente. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{K}$ folgende Ungleichungen erfüllt sind:

(U 5) Ist $0 < a < b$ und $0 < x < y$, so gilt $a \cdot x < b \cdot y$.

(U 6) Ist $a < 0$ und $x < y$, so gilt $a \cdot x > a \cdot y$.

(U 7) Es gilt für $a \neq 0$ immer $a^2 > 0$.

(U 8) Ist $a > 0$, so folgt $\frac{1}{a} > 0$. Ist $b < 0$, so folgt $\frac{1}{b} < 0$.

(U 9) Ist $0 < a < b$, so folgt $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(U10) Ist $0 < a < b$, so gilt $1 < \frac{b}{a}$.

Aufgabe 2 Anordnungen auf den rationalen Zahlen

In der Vorlesung wurde für $\mathbb{Q}$ die Teilmenge $\mathbb{Q}_+$ definiert. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Die Menge $\mathbb{Q}_+$ erfüllt die Bedingungen (AK1), (AK2) und (AK3) eines angeordneten Körpers.

(b) Ist umgekehrt $\mathbb{K}_+$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$, welche (AK1), (AK2) und (AK3) erfüllt, so gilt $\mathbb{K}_+ = \mathbb{Q}_+$.

Aufgabe 3 Wurzeln negativer Zahlen

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, in welchem es ein Element $x \in \mathbb{K}$ gibt mit $x^2 = -1$.

(a) Zeigen Sie, dass es keine Teilmenge $\mathbb{K}_+$ geben kann, so dass $(\mathbb{K}; \mathbb{K}_+)$ ein angeordneter Körper ist.

(b) Gibt es überhaupt einen Körper, in welchem die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat?

Aufgabe 4 Falls noch Zeit ist: Die endliche harmonische Reihe

Gegeben sei für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Zeigen Sie, dass diese Summe für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $n = 2^m - 1$ folgende Ungleichung erfüllt:

$$\frac{m}{2} < S_n < m.$$