Analysis 1
5. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
17. November 2010

Aufgabe 1 $\mathbb{Q}$ ist total geordnet

Zeigen Sie: Für je zwei rationale Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b\,, \qquad a = b\,, \qquad a > b\,.$$

Aufgabe 2 Multiplikation auf $\mathbb{Q}$

Zeigen Sie: Die Multiplikation

$$[(p_1, q_1)] \cdot [(p_2, q_2)] := [(p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)]$$

ist auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/_\sim$ wohldefiniert.

Aufgabe 3 Pythagoräische Zahlentripel

Ein Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen $0 < a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ heißt *pythagoräisches Tripel*.[1]

a) Finden Sie mindestens 3 pythagoräische Tripel. Hinweis: Wer keine Idee hat, kann in Aufgabenteil e) Hilfe finden.

b) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nennen wir den *Einheitskreis*.[2] Begründen Sie, warum das Auffinden aller pythagoräischen Tripel äquivalent zum Finden aller rationalen Punkte, d.h. Punkte mit rationalen Koordinaten, auf dem Einheitskreis ist.

c) Betrachten Sie für festes $t \in \mathbb{R}$ die Gerade $y = t(x + 1)$. Skizzieren Sie die Gerade und den Einheitskreis. Zeigen Sie: Die Gerade schneidet den Einheitskreis genau dann in einem zweiten Punkt mit rationalen Koordinaten, wenn die Steigung t rational ist.

   Hinweis: Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten hat entweder keine rationale oder zwei rationale Lösungen.

[1] Benannt nach dem antiken griechischen Philosophen und Mathematiker *Pythagoras von Samos* (ca. 570 v.u.Z. – 510 v.u.Z.).

[2] Wir verwenden an dieser Stelle die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, auch wenn sie erst in den späteren Vorlesungen eingeführt wird. Zur Bearbeitung der Aufgabe genügt das Schulwissen über reelle Zahlen.

d) Berechnen Sie für jede Steigung $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt der Geraden mit dem Einheitskreis.

e) Zeigen Sie abschließend: Ein Tripel $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ ist genau dann ein pythagoräisches Zahlentripel, wenn es natürliche Zahlen $0 \neq p,q \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a = 2pq\,, \qquad b = p^2 - q^2\,, \qquad c = p^2 + q^2\,.$$

Bemerkung: Eine interessante Frage ist, ob es auch von Null verschiedene ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

mit ganzzahligem Exponenten $n > 2$ gibt. *Pierre de Fermat* behauptete 1637, dass er einen kurzen Beweis dafür gefunden habe, dass es keine solche Lösungen gibt. Er gab den Beweis allerdings nicht an. Die Behauptung blieb Jahrhunderte lang offen. Die Suche nach einem Beweis lieferte zahlreiche interessante Ergebnisse in der Zahlentheorie. Nach langjähriger, intensiver Forschungsarbeit gelang es schließlich *Andrew Wiles* im Jahre 1995, Fermats Behauptung zu zeigen.

Der umfangreiche Beweis von Andrew Wiles beruht auf tiefen Sätzen der Algebra. Ob es – wie von Fermat behauptet – eine kurzen Beweis gibt, bleibt eine offene Frage. Vielleicht finden Sie einen ...