Analysis 1
4. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
10. November 2010

Aufgabe 1 Multiplikation ganzer Zahlen

Zeigen Sie, dass die Definition der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ wohldefiniert ist. Was bedeutet der Ausdruck „wohldefiniert" in diesem Kontext genau?

Aufgabe 2 Die rationalen Zahlen als Quotientenmenge

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Relation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, die zur Konstruktion der rationalen Zahlen verwendet wurde, eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3 Einige Teilbarkeitsregeln

Wir wollen nun die durch 3 und durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen charakterisieren. Dazu betrachten wir eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ der Form

$$n = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k.$$

(a) Stellen Sie die Zahl 123456789 in obiger Form dar. Wie ist also obige Darstellung einer natürlichen Zahl anschaulich zu interpretieren?

(b) Zeigen Sie folgende Behauptung: Für alle Zahlen $m \in \mathbb{N}$ ist $10^m - 1$ durch 9 teilbar.

Wir definieren nun die *Quersumme* einer natürlichen Zahl: Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k$ definiere die Quersumme $q(n)$ via $q(n) := \sum_{k=0}^{m} a_k$.

(c) Beweisen Sie nun folgende Teilbarkeitsregeln: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann durch 3, bzw. durch 9, teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3, bzw. durch 9, teilbar ist.

(d) Haben durch 27 teilbare Zahlen immer eine Quersumme, die durch 27 teilbar ist? Gibt es umgekehrt Zahlen, die nicht durch 27 teilbar sind, deren Quersumme aber durch 27 teilbar ist?

Aufgabe 4 Irrationalität

Zeigen Sie, dass die Gleichung $X^2 - 2 = 0$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat.