Analysis 1
3. Tutorium

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
3. November 2010

Aufgabe 1 Relationen im Alltag

Überprüfen Sie, ob die folgenden Beispiele die geforderten Eigenschaften einer mathematischen Äquivalenzrelation erfüllen.

a) Die „gleichvoll-Relation“: Eine Tasse mit Zucker ist in gleichvoll-Relation zu einer anderen Tasse mit Zucker, wenn sich ihre Füllungen höchstens um 1 Zuckerkorn unterscheiden.

b) Die „gleichteuer-Relation“: In einem festgelegten Kaufhaus steht eine Ware in gleichteuer-Relation zu einer anderen Ware, wenn sie den gleichen Preis hat.

c) Die „ungefähr-Relation“: Eine Zahl steht in ungefähr-Relation zu einer anderen Zahl, wenn sie dieselben Vorkommastellen hat.

d) Die „Freundschaft-Relation“: eine Person steht in Freundschaft-Relation zu einer anderen, wenn sie sich der anderen Person freundschaftlich verbunden fühlt.

Finden Sie weitere Relationen in Ihrem Alltag, die Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die folgende Relation $\sim$ eingeführt:

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad n_1 + m_2 = n_2 + m_1 \,.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3 Additionsregeln für ganzen Zahlen

Leiten Sie die folgenden Rechenregeln für ganze Zahlen aus den bekannten Rechenregeln für natürliche Zahlen ab:

a) Für alle $n, m, k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} (n+m)+k &= n+(m+k) && \text{(Assoziativitiät)} \\ n+m &= m+n && \text{(Kommutativität)} \end{aligned}$$

b) Es gibt genau eine ganze Zahl $n_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$n + n_0 = n = n_0 + n \,.$$

c) Für jede Element $n \in \mathbb{Z}$ gibt es genau ein Element $m \in \mathbb{Z}$ mit $n + m = 0$.

Aufgabe 4 Ganze Zahlen axiomatisch

Stellen Sie, analog zu den Peano-Axiomen für $\mathbb{N}$, ein Axiomensystem für die ganzen Zahlen auf. Dabei sollen die Axiome insbesondere die Definition der Addition zulassen. Definieren Sie die Addition innerhalb des von Ihnen aufgestellten Axiomensystems.

Aufgabe 5

Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, falls für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \text{ und } yRx \qquad \Rightarrow \qquad x = y \; .$$

Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation heißt auch *Ordnungsrelation*. Welche Relationen auf M sind sowohl Äquivalenzrelationen als auch Ordnungsrelationen?