

Analysis 1

1. Tutorium



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
20./21. Oktober 2010

Aufgabe 1 Das Summenzeichen

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar, und seien a_1, \dots, a_n beliebige Zahlen. Welche der folgenden Summen sind gleich?

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^n a_k, & \sum_{k=-3}^{n-4} a_{k+4}, \\ \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k} + \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k-1} + \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k-2} + \sum_{k=1}^{n/4} a_{4k-3}, & \sum_{k=1}^{n/4} (a_{4k} + a_{4k-1} + a_{4k-2} + a_{4k-3}), \\ \sum_{k=1}^{n/4} \left(\sum_{l=0}^3 a_{4k-l} \right), & \sum_{k=1}^{n-1} (2a_{k+1} - a_k) + 2a_1 - a_n. \end{array}$$

b) Finden Sie für die folgenden Summen jeweils einen Ausdruck mit einem Summenzeichen:

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{12 \cdot 13},$$
$$0 + 1 - 4 + 9 - 16 + \dots + 225 - 256.$$

Aufgabe 2 Wo steckt der Fehler?

Nehmen Sie Stellung zu folgendem Induktionsbeweis der Aussage: Alle Tiere im Frankfurter Zoo sind Affen.

Beweis: Zuerst stellen wir fest, dass es im Frankfurter Zoo einen Affen gibt. Wir beweisen nun durch vollständige Induktion, dass jede Gruppe von n Tieren, die einen Affen enthält, ausschließlich aus Affen besteht.

Die Behauptung ist richtig für $n = 1$ (Induktionsanfang).

Sei nun die Behauptung für alle Mengen an Tieren bewiesen, die aus n Tieren bestehen (Induktionsannahme). Haben wir nun eine Menge aus $n + 1$ Tieren, entfernen wir ein Tier aus dieser Menge. Nach Induktionsvoraussetzung besteht die übrige Menge aus lauter Affen. Bringen wir nun dieses eine Tier zur Gruppe zurück und entfernen stattdessen ein anderes, so bleibt nach Induktionsvoraussetzung wiederum eine Gruppe aus Affen zurück. Das zuerst entfernte Tier muss somit ebenfalls ein Affe gewesen sein. Folglich ist jedes Tier der Gruppe ein Affe (Induktionsschritt).

Damit ist gezeigt, dass jede Gruppe von Tieren, die einen Affen enthält – insbes. die Tiere im Frankfurter Zoo – komplett aus Affen besteht (Induktionsschluss).

Aufgabe 3 Vollständige Induktion

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion. Schreiben Sie die Beweise ausführlich auf:

a) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Eine n -elementige Menge besitzt 2^n verschiedene Teilmengen.

Aufgabe 4

In einem Schuhgeschäft kostet ein Paar Schuhe 100 Euro. Da drei Paar Schuhe mal 100 Euro den Betrag 300 Euro ergibt, bezahlen Sie für drei Paar Schuhe anstandslos 300 Euro. Warum rechnen Sie eigentlich nicht: 100 Euro mal drei Paar Schuhe ergibt 300 Paar Schuhe und räumen das Schuhgeschäft leer?