Analysis 1
Weihnachtsaufgaben

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik

Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra

Ein *komplexes Polynom* ist eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Die Zahl a_0 heißt *Absolutglied* von p. Ist p nicht die Nullfunktion (schreibe $p \neq 0$), so können wir o.B.d.A. $a_n \neq 0$ annehmen. In diesem Fall sagen wir, das Polynom p hat den *Grad* n.

Wir werden uns im Folgenden mit dem sog. *Fundamentalsatz der Algebra* befassen:

> *Jedes Polynom $p \neq 0$ vom Grad $n \geq 0$ ist das Produkt von genau n Linearfaktoren, d.h., es gibt Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit*
>
> $$p(z) = \lambda(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$
>
> *für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Der Fundamentalsatz ist vor allem deshalb interessant, weil es für ihn mehrere, sehr verschiedenartige Beweise gibt. Einen auf Gauß zurückgehenden Beweisweg wollen wir auf diesem Blatt folgen. Den genauen Beweis können wir mit den aktuellen Mitteln der Vorlesung nicht führen. Aber die Beweisidee können wir sehr gut herausarbeiten.

Aufgabe 1 Die „o.B.d.A.“s

Der erste Schritt des Beweises dient der Vereinfachung:

a) Machen Sie sich klar, dass es genügt zu zeigen, dass jedes Polynom $p \neq 0$ vom Grad $n > 0$ eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ hat.

b) Warum können wir o.B.d.A. annehmen, dass das Absolutglied von p nicht verschwindet?

Wege in den komplexen Zahlen

Eine Abbildung $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ wird oft auch als *Weg* bezeichnet. Die Bildmenge $\gamma([0, 1])$ heißt dann die *Spur* des Weges. Der Weg heißt *geschlossener Weg*, falls $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt.

Man kann sich einen Weg als die Beschreibung eines sich bewegen Teilchens in der Gaußschen Zahlenebenen vorstellen. Dabei beschreibt $\gamma(t)$ für jedes $t \in [0, 1]$ die Position des Teilchens zum Zeitpunkt t. Insbesondere startet des Teilchen in $\gamma(0)$ und bewegt sich schließlich nach $\gamma(1)$. In diesem Sinne kommt bei einem geschlossenen Weg das Teilchen am Ende wieder am Startpunkt an.

Aufgabe 2 Veranschaulichen von Wegen

Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebenen die folgenden Wege, genauer deren jeweilige Spur:

$$\gamma_1(t) := t \cdot (1+i)\,, \qquad \gamma_2(t) := t^2 \cdot (1+i)\,,$$
$$\gamma_3(t) := \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)\,, \qquad \gamma_4(t) := \cos(6\pi t) + i\sin(6\pi t)\,,$$
$$\gamma_5(t) := \begin{cases} 4t & \text{, falls } 0 \le t \le \frac{1}{4}\,, \\ 1 + 4i(t - \frac{1}{4}) & \text{, falls } \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2}\,, \\ 1 + i - 4(t - \frac{1}{2}) & \text{, falls } \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4}\,, \\ i - 4i(t - \frac{3}{4}) & \text{, falls } \frac{3}{4} < t \le 1\,. \end{cases}$$

Was ist der Unterschied zwischen γ_1 und γ_2? Was ist der Unterschied zwischen γ_3 und γ_4?

Aufgabe 3 Der anschauliche Beweis

Jetzt können wir in den Beweis einsteigen: Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Für $R > 0$ betrachten wir den geschlossenen Weg

$$\gamma_R(t) := p\big(R \cdot \big(\cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)\big)\big)\,.$$

a) Machen Sie sich klar, dass die Spur des Weges γ_R genau das Bild des Kreisrandes $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ mit Radius R unter der Abbildung p ist.

b) Wie sehen die Wege $\gamma_R(t)$ für das Polynom $p(z) = z^n$ aus?

Auf der Homepage zur Veranstaltung finden Sie bei den Übungen ein Java-Applet (`Fundamentalsatz.html`).[1] Damit können Sie für ein Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_5 z^5$ die Wege γ_R für verschiedene Radien $R > 0$ betrachten.

c) Spielen Sie mit dem Applet. Achten Sie dabei insbesondere auf Folgendes:

   1. Wie oft windet sich der Weg?
   2. Was fällt auf, wenn R sehr groß wird?
   3. Was fällt auf, wenn R sehr klein wird?

Mit den derzeitigen Mitteln der Vorlesung können wir den Beweis des Fundamentalsatzes noch nicht führen. Aber erahnen können wir ihn ...

d) Begründen Sie anschaulich, warum der Fundamentalsatz der Algebra gilt.

[1] Das Applet wurde mit GeoGebra erstellt. Die Quelldatei finden Sie als `Fundamentalsatz.ggb` bei den Übungen. Sie können damit gern experimentieren.