Analysis 1
15. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
17. Februar 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Gegenbeispiele für beliebige Vereinigungen und Schnitte

Wir wollen in dieser Aufgabe sehen, dass beliebige Durchschnitte offener Mengen nicht offen und beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein brauchen.

(a) Betrachten Sie die offenen Mengen $I_n := \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht offen ist.

(b) Finden Sie eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ eine abgeschlossene Menge $A_i \subseteq \mathbb{R}$, so dass $\bigcup_{i\in I} A_i$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 Unstetige reelle Funktionen

In dieser Aufgabe sehen wir zwei klassische Beispiele für reelle Funktionen, die in mindestens einem Punkt unstetig sind.

Die Heavyside Funktion

Wir betrachten folgende reelle Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass H in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass H in 0 unstetig ist.

(b') Zeigen Sie mit Hilfe des $\epsilon - \delta$ Kriteriums, dass H in 0 unstetig ist.

(c) Finden Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$, für die $H^{-1}(U)$ nicht offen ist.

Die Dirichlet Funktionen

Wir betrachten folgende reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Aufgabe 3 Der Abschluß von Mengen

Aus der Vorlesung kennen Sie für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$. Dies ist A vereinigt mit allen Häufungspunkten $x \in X$ von Folgen in A. Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 Sandwich Theorem

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = g = \lim_{n\to\infty} c_n$ und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so wissen wir aus der Vorlesung, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen g konvergiert.

(a) Formulieren und beweisen Sie daraus ein „Sandwich Theorem stetiger reelleer Funktionen".

(b) Zeigen Sie nun, dass folgende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist:

$$g(x) := \begin{cases} 1 & x \in \left]-\infty, -1\right[\;\cup\; \left]1, \infty\right[\\ \frac{1}{n+1} & x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right[\;\cup\; \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ mit } n \geq 1 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Skizzieren Sie sich zuerst einen Teil der Funktion, z. B. g eingeschränkt auf die Menge $\left]-2, -\frac{1}{5}\right[\;\cup\; \left]\frac{1}{5}, 2\right[$.

(c) Gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U$, so dass g in jedem Punkt $x \in U$ stetig ist?