Analysis 1
14. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
10. Februar 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $a < b$ das Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist

a) indem Sie die Definition einer abgeschlossenen Menge nachweisen.

b) indem Sie nachweisen, dass $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ offen ist.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind offen, welche sind abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz.

a) $\emptyset$,

b) $\{0\}$,

c) $[0, 1]$,

d) $]0, 1[$,

e) $]0, 1]$,

f) $[0, \infty[$,

g) $]0, \infty[$,

h) $[0, 1] \cup]2, 3[$,

i) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$,

j) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$,

k) $\mathbb{Q}$,

l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to [0, \infty[$ mit $f(z) := |z|$. Zeigen Sie, dass f stetig ist

a) anhand des Folgenkriteriums,

b) anhand des ε-δ-Kriteriums.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

a) Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert.

b) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der obigen Reihe mit sich selbst.

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergiert.
Hinweis: Das geometrische Mittel ist kleiner gleich dem arithmetischen Mittel.

Hausübungen

Aufgabe 49

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ ist absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 .$$

Aufgabe 50

Es bezeichne $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$ die komplexe Einheitskreisscheibe ohne den Rand und $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der komplexen Einheiskreis. Zeigen oder widerlegen Sie: In $\mathbb{C}$ ist

a) $\mathbb{D}$ offen.

b) $\mathbb{D}$ abgeschlossen.

c) $\mathbb{T}$ offen.

d) $\mathbb{T}$ abgeschlossen.

Aufgabe 51

Betrachten Sie die Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1/x$. Zeigen Sie, dass f stetig ist

a) anhand des Folgenkriteriums,

b) anhand des ε-δ-Kriteriums.

Hinweis: Warum genügt es, die Stetigkeit auf jedem Intervall $]C,\infty[$ mit $C > 0$ nachzuweisen?

Aufgabe 52

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $a \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine in a stetige Funktion. Sei $b \in \mathbb{R}$ mit

$$b < f(a) .$$

Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass gilt

$$\forall x \in K_\varepsilon(a) : \quad b < f(x) .$$