Analysis 1
13. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
3. Februar 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen. Tragen Sie Implikationspfeile $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ zwischen die folgenden Felder ein. Begründen Sie ihre Wahl.

$\boxed{\sum_n a_n \text{ genügt dem Quotientenkriterium.}}$ $\boxed{\text{Die Partialsummen } \sum_{k=0}^n a_k \text{ sind beschränkt.}}$

$\boxed{\sum_n a_n \text{ konvergiert absolut.}}$ $\boxed{\sum_n a_n \text{ konvergiert.}}$ $\boxed{\lim_n a_n = 0.}$

$\boxed{\sum_n a_n^2 \text{ konvergiert.}}$ $\boxed{\sum_{k=n}^m a_k \text{ genügen dem Cauchykriterium.}}$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Reihen sind konvergent? (Den Wert der Reihe brauchen Sie nicht zu bestimmen.)

a) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n$,

b) $\sum_{n=1}^\infty \left(2^{-n} + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$,

c) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(1 + (1/2)^n\right)$,

d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

e) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

f) $\sum_{n=0}^\infty (\sqrt[n]{n} - 1)^n$,

Aufgabe 3 Cauchysches Verdichtungskriterium, Zeta-Funktion

a) Sei $(a_n)_n$ eine positive, monoton fallende Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^\infty 2^n a_{2^n}$ konvergiert.
Hinweis: Schätzen Sie die Partialsummen der ersten durch geeignete Partialsummen der zweiten Reihe ab.

b) Betrachten Sie die Reihe

$$\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass diese Reihe für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \le 1$ divergiert.

Bemerkung: Man kann $\zeta(z)$ für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ definieren. Die entstehende Funktion $z \mapsto \zeta(z)$ heißt *Riemannsche Zeta-Funktion*. Sie verbindet auf überraschende Weise Analysis und Zahlentheorie. Diese Verbindung wird im folgenden Aufgabenteil sichtbar, wo die *Eulersche Produktdarstellung* eingeführt wird. Eines der berühmtesten offenen Probleme der Mathematik, die *Riemannsche Vermutung*, betrifft die Lage der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion, mit deren Hilfe man zu sehr genauen Abschätzungen über die Verteilung von Primzahlen kommen kann.

c*) Sei $\mathscr{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist prim}\}$. Zeigen Sie, dass für alle $s > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} .$$

Hinweis: Entwickeln Sie $(1 - p^{-s})^{-1}$ in eine geometrische Reihe, und zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{p \in \mathscr{P}, p \leq m} \frac{1}{1 - p^{-s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} .$$

Sie können ausnutzen, dass sich jede natürliche Zahl auf genau eine Weise in Primfaktoren zerlegen lässt.

Hausübungen

Aufgabe 46

Welche der folgenden Reihen sind konvergent (ggf. in Abhängigkeit von α bzw. q)? Den Wert der Reihe brauchen Sie nicht zu bestimmen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^n}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+5}$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n$,

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$,

j) $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+(-1)^n}$ für $q \in \mathbb{R}$,

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

Aufgabe 47

Betrachten Sie die folgende rekursiv definierte Folge:

$$a_0 := 1 , \qquad a_{n+1} := \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k} .$$

Konvergiert die Folge $(a_n)_n$? Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$? Geben Sie im konvergenten Fall jeweils den Grenzwert an. Begründen Sie sorgfältig.

Aufgabe 48 Langsame Divergenz der harmonischen Reihe

Stellen Sie sich vor, Sie besitzen eine große Kiste mit Holzbausteinen, wobei alle Steine zwei Einheiten lang, eine Einheit breit und eine viertel Einheit dick sind. Sie legen die Steine nun so übereinander, dass sie zwar in der Länge evtl. übereinander hinausragen, nicht aber in der Breite (siehe Skizze). Während der Bauphase stützen Sie den Turm, sodass er nicht umfällt, auch wenn er instabil gebaut wurde. Der gesamte Turm hält genau dann ohne Stützen, wenn der Schwerpunkt der oberen k Steine sich über dem $(k+1)$-ten Stein (von oben gezählt) befindet. Nehmen wir für dieses Aufgabe an, dass der Turm auch noch dann hält, wenn der Schwerpunkt genau auf dem Rand liegt. Um uns das Leben einfach zu machen, denken wir uns den Turm als von oben nach unten aufgebaut. Den oberen Stein denken wir uns außerdem als fix.

Vom Schwerpunkt interessiert nur die horizontale Lage, wir können also zwei reelle Folgen definieren, nämlich die Folge $(p_n)_n$ der Positionen des n-ten Steins (dessen Mitte) und die Folge $(s_n)_n$ der Schwerpunkte der oberen n Steine. Der oberste Stein habe seine Mitte bei 0, d.h. $p_0 = 0$. Der Turm hält, wenn für alle $n \geq 1$ gilt $\left|p_n - s_{n-1}\right| \leq 1$.

a) Geben Sie eine (einfache) Formel zur Berechnung von s_n aus $p_0, \ldots, p_n$ an.

b) Wieviele Steine können Sie aufeinander stapeln, wenn Sie jeden Stein eine zehntel Einheit weiter nach rechts als den darüberliegenden schieben, d.h. wenn $p_n = 1/10 + p_{n-1}$.

c) Angenommen Sie verwenden die folgende Taktik: „Fange von oben an und lege den n-ten Stein so weit nach rechts, dass der Schwerpunkt aller darüber liegenden Steine gerade noch auf dem Rand des $(n+1)$-ten Steins liegt." Dann ist die Folge $(p_n)_n$ eindeutig bestimmt und damit auch $(s_n)_n$. Geben Sie eine (einfache) Formel zur Berechnung von p_n aus s_{n-1} an. Machen Sie sich klar, dass der entsprechende Turm tatsächlich noch hält.

d) Konvergiert die nach c) definierte Folge $(p_n)_n$? Welche Konsequenzen hat dies?

e) Rechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder von $(p_n)_n$ und die ersten 5 Differenzen $p_n - p_{n-1}$ konkret aus. Raten Sie dann eine explizite Formel für $p_n - p_{n-1}$ und beweisen Sie diese. Was hat die Folge $(p_n)_n$ mit der harmonischen Reihe zu tun?

f) Wie hoch wird ein nach der Taktik in c) gebauter Turm, wenn der Bogen drei Meter überspannen soll. Eine Einheit sei 10 cm. Vergleichen Sie die Höhe mit der Entfernung der Erde zur Sonne.
Hinweis: Es gilt

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \ln n \longrightarrow 0.57721\cdots =: C\ .$$

Nehmen Sie an, dass für große n Gleichheit gilt.[1]

g*) Angenommen, Sie haben 20 Steine in Ihrer Kiste und möchten einen Turm bauen, bei dem ein Stein möglichst weit über das Fundament hinausragt. Dabei dürfen Sie die Steine ohne jede Einschränkung übereinanderstapeln. Wie bauen Sie Ihren Turm?

[1] Der Grenzwert C heißt *Euler-Mascheronische Konstante*.