Analysis 1
12. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
27. Januar 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Geometrische Reihen

Überprüfen Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren und berechnen Sie ggf. den Wert der Reihe:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{3})^n$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 13(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i)^n$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n}+\frac{4^n}{3^{2n}})$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{42})^{10-n}$.

Aufgabe 2 Eine Teleskop-Summe

Betrachten Sie die Folge $a_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_n$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz.

Kontraktionen und Fixpunkte

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\varphi : X \to X$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Zahl $0 \le L < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \le L \cdot d(x,y)\,.$$

Ein Punkt $x \in X$ mit $\varphi(x) = x$ heißt *Fixpunkt* von φ.

Aufgabe 3 Banachscher Fixpunktsatz

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\varphi : X \to X$ eine Kontraktion. Für einen Startpunkt $x_0 \in X$ definieren wir rekursiv eine Folge $(x_n)_n$ durch

$$x_{n+1} := \varphi(x_n)\,.$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung φ besitzt höchstens einen Fixpunkt.

b) Die Folge $(x_n)_n$ ist konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert mit $x_\infty := \lim_n x_n$.

c) Der Grenzwert x_∞ ist ein Fixpunkt von φ. (Insbesondere hängt der Grenzwert nicht vom Startpunkt x_0 ab.)

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Fehlerabschätzung:

$$d(x_n, x_\infty) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) .$$

Fassen Sie die eben gezeigten Aussagen in einem Satz zusammen. Dieser Satz heißt *Banachscher Fixpunktsatz*.

Aufgabe 4 Konvergenz und Teilfolgen

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungspunkt.

Diskutieren Sie, ob eine Abschwächung von b) zu

c) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt höchstens einen Häufungspunkt.

ebenfalls zu obigen Aussagen äquivalent ist.

Hausübungen

Aufgabe 43 Banachscher Fixpunktsatz am Beispiel der Fibonnacci-Zahlen

Betrachten Sie noch einmal Aufgabe 20 der 5. Übung. Dort haben wir gesehen, dass für die Folge der Fibonnacci-Zahlen $f_0 := f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ der Quotient $x_n := f_{n+1}/f_n$ jeweils eine Kettenbruchdarstellung der Form

$$x_n := \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{1+1}}}$$

besitzt, insbesondere gilt $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$. Wir wollen mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, dass diese Folge konvergiert. Hierzu betrachten wir die Abbildungsvorschrift $\varphi(x) := 1 + \frac{1}{x}$. Zeigen Sie:

a) Für $n \geq 1$ gilt $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$.

b) Für $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ ist auch $\varphi(x) \in [\frac{3}{2}, 2]$. Die Abbildung $\varphi : [\frac{3}{2}, 2] \to [\frac{3}{2}, 2]$, $x \mapsto \varphi(x)$ ist eine Kontraktion.

c) Folgern Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge der Quotienten $x_n = f_{n+1}/f_n$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert g.

d) Welche (unendliche) Kettenbruchentwicklung erwarten Sie für g?

Aufgabe 44 Banachscher Fixpunktsatzes am Beispiel des Heron-Verfahrens

Beim Babylonischen Wurzelziehen, auch Heron-Verfahren genannt, in der Aufgabe 42 der 10. Übung haben Sie näherungsweise mit folgender Rekursionsformel die Wurzel aus 3 bestimmt:

$$x_{n+1} := \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{3}{x_n}) .$$

a) Wie lässt sich der Banachsche Fixpunktsatz auf diese Folge anwenden? Geben Sie insbesondere einen Startwert x_0, ein geeignetes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Kontraktion $\varphi : I \to I$ und die Konstante L an.

b) Welche Fehlerabschätzung liefert der Banachsche Fixpunktsatz? Vergleichen Sie diese Abschätzung mit der Abschätzung aus Aufgabe 42.

Aufgabe 45 Ein Beispiel eines normierten Raums

Viele wichtige normierte Räume in der Mathematik sind Räume von Funktionen oder Räume von Folgen.[1] Wir wollen uns in dieser Aufgabe mit einem solchen Beispiel befassen:

Sei ℓ^∞ die Menge aller beschränkten Folgen $(x_n)_n$ mit Werten in den komplexen Zahlen, und sei c_0 die Menge aller komplexwertigen Nullfolgen:

$$\begin{aligned} \ell^\infty &:= \left\{(x_m)_m : (x_m)_m \text{ ist eine komplexwertige, beschränkte Folge}\right\} , \\ c_0 &:= \{(x_m)_m : (x_m)_m \text{ ist eine komplexwertige Folge mit } \lim_n x_n = 0\} . \end{aligned}$$

Für ein Element $x = (x_m)_m \in \ell^\infty$ nennen wir die Zahl x_m (analog zu $\mathbb{C}^n$) auch die m-te *Koordinate* von x. Für eine Element $x = (x_m)_m \in \ell^\infty$ definieren wir[2]

$$\|x\|_\infty := \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|x_m\right| .$$

Machen Sie sich klar (ohne Beweis, ohne Bewertung):

a) Die Menge ℓ^∞ ist ein Untervektorraum des komplexen Vektorraums aller komplexwertigen Folgen. Insbesondere ist ℓ^∞ selbst ein komplexer Vektorraum.

b) Die Menge c_0 ist ein Untervektorraum von ℓ^∞.

c) Durch $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf ℓ^∞ definiert. Somit ist $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.

Bemerkung und Notation: Wir wollen nun Folgen in ℓ^∞ untersuchen. Für eine solche Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedes einzelne Folgenglied $x^{(n)}$ ein Element von ℓ^∞, also eine Folge komplexer Zahlen $x^{(n)} =: (x_m^{(n)})_m$.

Sei nun $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $c_0 \subseteq \ell^\infty$, d.h. für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist $(x_m^{(n)})_m$ eine komplexwertige Nullfolge. Weiter sei die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ konvergent mit Grenzwert $g = (g_m)_m \in \ell^\infty$. Zeigen Sie:

d) (Koordinatenweise Konvergenz:) Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge der m-ten Koordinaten $(x_m^{(n)})_n$ gegen den Wert g_m.

e) Der Grenzwert g liegt wieder in c_0, d.h. $(g_m)_m$ ist eine komplexwertige Nullfolge.

[1] Folgen sind schließlich Funktionen mit speziellem Definitionsbereich.
[2] vgl. Maximumsnorm auf $\mathbb{C}^n$