Analysis 1
11. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
20. Januar 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Beispiele konvergenter Folgen

Berechnen Sie den Grenzwert folgender Folgen:

(a) $a_n := \frac{n^3+n-1}{2n^3+n^2+1}$,

(b) $b_n := \frac{1+2+...+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k$,

(c) $c_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ... + \left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

Aufgabe 2 Eine zweifelhafte Umformulierung des Konvergenzbegriffs

Angenommen, Sie hören beim leckeren Mittagessen in der Mensa zwei Stühle weiter folgenden Beitrag, mit welchem ein Studierender einem anderen Studierenden sein Verständnis von Konvergenz zusammenfasst:
„Wenn eine Folge einer Zahl in jedem Schritt näher kommt ohne diese Zahl jemals zu erreichen, so nennt man diese Zahl den Grenzwert einer Folge."
Eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_n$ mit dieser Eigenschaft nennen wir nun für diese Aufgabe *mensakonvergent* und wir schreiben $\mathrm{MLim}_{n\to\infty} x_n = g$, falls g eine oben beschriebe Zahl ist. Wir nennen für diese Aufgabe die Zahl g auch *Mensagrenzwert*.

(a) Formulieren Sie für Mensakonvergenz eine mathematische Definition, mit der Sie die weiteren Teilaufgaben bearbeiten können.

(b) Zeige oder widerlege: Jede mensakonvergente Folge ist konvergent.

(c) Zeige oder widerlege: Jede mensakonvergente Folge ist monoton und beschränkt.

(d) Zeige oder widerlege: Der Mensagrenzwert einer Folge ist eindeutig, sofern er existiert.

(e) Zeige oder widerlege: Jede Folge ist mensakonvergent.

(f) Zeige oder widerlege: Jede beschränkte Folge ist mensakonvergent.

(g) Zeige oder widerlege: Jede konvergente Folge ist mensakonvergent.

Aufgabe 3 Eine Charakterisierung des Supremums

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge. Zeigen Sie, dass für eine obere Schranke $s \in \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gilt $s = \sup(A)$.

(2) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.

Hausübungen

Aufgabe 40 Beispiele konvergenter Folgen

Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Folgen.

(a) $a_n := \frac{n^4+13n^2-1}{(2n^2+3)^2-42}$,

(b) $b_n := \sum_{k=0}^{n} q^k$ für eine komplexe Zahl $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$,

(c) $c_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} i^k$,

(d) $d_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 41 Polynom vs. Exponent

Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie $x > 0$ mit $|z| = 1 + x$ und die Folgenglieder für (z.B.) $n > 2k$.

Aufgabe 42 Babylonisches Wurzelziehen

Seien $x > 0$ und $a_0 > 0$ reelle Zahlen. Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ via

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv ist und monoton fällt.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ gilt: $a_n \geq \sqrt{x}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Dieses Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln heißt *Heronverfahren* oder *babylonisches Wurzelziehen*. Wir wollen abschliessend noch sehen, wie „schnell" die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dazu führen wir den Begriff der quadratischen Konvergenz ein:
Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *quadratisch konvergent*, falls $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ existiert und falls es eine positive Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C \cdot |x_n - \xi|^2$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass die aus dem Heronverfahren gewonnene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quadratisch konvergent ist.

(e) Bestimmen Sie zwei korrekte Nachkommastellen von $\sqrt{3}$ mit Hilfe des Heronverfahrens. Starten Sie hierbei mit $a_0 = 1$. Beweisen Sie mit Hilfe Ihrer Abschätzungen in (d), dass Ihre Approximation die geforderten zwei korrekten Nachkommastellen besitzt.