Analysis 1
10. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
12. Januar 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Folgen konvergieren. Argumentieren Sie sorgfältig mit Hilfe der Definition einer konvergenten Folge:

$$a_n := \frac{3n+1}{n}, \qquad b_n := \frac{n^2-2n+1}{n^3+3n}.$$

Aufgabe 2

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie:

a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} \left|x_k\right|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Diese Norm heißt auch *1-Norm* oder *Manhattan-Norm*.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_k| : k = 1, \dots, n\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Diese Norm heißt auch *Maximumsnorm*.

Die *2-Norm* oder *euklidische Norm* $\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ auf $\mathbb{R}^n$ kennen Sie bereits aus der Vorlesung.

c) Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Einheitskugeln $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$.

Hausübungen

Aufgabe 35

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ nicht konvergiert. Schreiben Sie Ihren Beweis besonders sorgfältig auf.

Aufgabe 36

a) Zeigen Sie: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente, reelle Folgen, so ist auch die Produktfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)\,.$$

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2a) der Anwesenheitsübungen verwenden.

b) Finden Sie zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die jeweils nicht konvergieren, aber deren Produkt $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente, reelle Folge mit Grenzwert a. Untersuchen Sie die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

$$b_n := a_n^{23} + 15a_n^{10} + a_n^2\,.$$

Aufgabe 37

a) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit

$$b_n := \tfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \tag{1}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

b) Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, die selbst nicht konvergiert, für welche aber die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ aus (1) konvergiert?

Aufgabe 38 Zusatzaufgabe

Betrachten Sie noch einmal Aufgabe 3 aus den Anwesenheitsübungen. Man kann zeigen, dass für jedes $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \tag{2}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. (Den Beweis wollen wir hier nicht führen.)

a) Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Einheitskugeln $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für verschiedene Werte von p.

b) In welchem Sinn ist die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein „Grenzwert“ der Normen $\|\cdot\|_p$?
(Dadurch wird auch die Notation $\|\cdot\|_\infty$ gerechtfertigt.)

c) Skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für einige Werte $p < 1$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ für $p < 1$ keine Norm auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ist.