Analysis 1
9. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
16. Dezember 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Rechnen in $\mathbb{C}$

Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.:

$$i^{123456789}, \qquad \sum_{k=1}^{13823807582365} i^k.$$

Aufgabe 2 Polardarstellung komplexer Zahlen

Gesucht wird eine komplexe Lösung der Gleichung

$$\left(z \cdot \frac{1+i}{2}\right)^2 = -i.$$

Bestimmen Sie ihre Polardarstellung.

Aufgabe 3 Gleichungen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $z^7 + 1 = 0$,

(b) $z^6 + 9z^3 = -8$,

(c) $|z + i| = |z - 1|$.

Aufgabe 4 Systeme von Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie folgende Punktmenge in der komplexen Zahlenebene:

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \geq 1, |\mathrm{Re}\, z| \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\, z > 0 \right\}.$$

Aufgabe 5 Inversion am Einheitskreis

Wir betrachten die komplexwertigen Abbildung $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert via

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ und } g(z) := \frac{1}{\bar{z}}.$$

Inwiefern und warum passen diese Abbildungen zur Überschrift der Aufgabe?

Hausübungen

Aufgabe 31 Die Cayleytransformation

Wir betrachten die komplexwertige Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert via

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung bijektiv ist und bestimmen Sie das Bild der reellen Achse und das Bild der Einheitskreislinie.
Obige Abbildung heißt auch *Cayleytransformation* und spielt in der Analysis an vielen Stellen eine wichtige Rolle.

Aufgabe 32 Möbiustransformationen

In dieser Hausübungen wollen wir uns mit einer bestimmten Klasse komplexer Abbildungen beschäftigen, den Möbiustransformationen. Die Abbildungsvorschrift einer *Möbiustransformation* ist wie folgt durch 4 komplexe Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ bestimmt:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $ad - bc \neq 0$ gelte. Der Definitionsbereich D einer Möbiustransformation ist die größte Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der obige Vorschrift wohldefiniert ist und der Wertebereich W einer Möbiustransformation ist die Teilmenge von $\mathbb{C}$, so dass $f : D \to W$ bijektiv ist.

(a) Welche der auf diesen Übungsblatt bisher aufgetauchten Abbildungen sind Möbiustransformationen? Ist die Identität $id(z) = z$ eine Möbiustransformation?

(b) Bestimmen Sie für eine Möbiustransformation f in Abhängigkeit von a, b, c, d ihren Definitons- und Wertebereich.

(c) Warum ist die Verknüpfung $g \circ f$ zweier Möbiustransformationen nach unserer Definition in der Regel nicht wohldefiniert oder keine Möbiustransformation mehr?

(d) Betrachten Sie nun nur die Abbildungsvorschriften $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $g(z) = \frac{kz+l}{mz+n}$ zweier Möbiustransformationen und bilden Sie $g \circ f$ ohne Rücksicht auf den Definitionsbereich. Gibt es für die Abbildungsvorschrift von $g \circ f$ eine Möglichkeit, diese wieder als Möbiustransformation zu erklären?

(e) Warum wird die Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ verlangt?

Aufgabe 33 Die Lösungsmenge eines komplexen Gleichungssystems

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Zeigen Sie, dass die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Aufgabe 34 Es gibt viele Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Es sei $\omega \in \mathbb{N}$ eine Zahl, deren Wurzel irrational ist. Sei

$$\mathbb{Q}[\sqrt{\omega}] := \{a + b\sqrt{\omega} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{\omega}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist. Folgern Sie, dass es sehr viele Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gibt, also viele Körper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$.

Sternchen Aufgabe

Zeichnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$ in die Gaußsche Zahlenebene und verbinden Sie nicht benachbarte Punkte.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und
ein gutes neues Jahr!

Burkhard Kümmerer, Walter Reußwig, Kay Schwieger