Analysis 1
8. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
09. Dezember 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Betrachten Sie folgende komplexe Zahlen:

$$z_1 = 3 + 4i, \qquad z_2 = -2 + i, \qquad z_3 = 7 - i.$$

a) Bestimmen Sie den Real und Imaginärteil von $z_1 + z_3$, $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Zahl $r \in \mathbb{C}$ heißt *Quadratwurzel* von z, falls $r^2 = z$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle Quadratwurzeln von -1, von i und von $3 + 4i$.

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde gezeigt: Sind $\emptyset \neq J_n \subseteq \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ abgeschlossene, beschränkte Intervalle mit $J_{n+1} \subseteq J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ nicht-leer.

a) Finden Sie beschränkte Intervalle $\emptyset \neq J_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $J_{n+1} \subseteq J_n$ und $\bigcap_n J_n = \emptyset$.

b) Finden Sie abgeschlossene Intervalle $\emptyset \neq J_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $J_{n+1} \subseteq J_n$ mit $\bigcap_n J_n = \emptyset$.

c) Betrachten Sie $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{R}$. Finden Sie Intervalle $J_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{Q}$ $(a_n, b_n \in \mathbb{Q})$ mit $J_{n+1} \subseteq J_n$ und $\bigcap_n J_n = \emptyset$.

Aufgabe 3

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\sup A \leq \sup B$.

b) Für jedes $a \in A$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $b \in B$ mit $a - \epsilon < b$.

Hausübungen

Aufgabe 27 Harmonisches, geometrisches und arithmetisches Mittel

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

a) Ist $\sum_{i=1}^n a_i = n$, so gilt

$$\prod_{i=1}^n a_i \le 1 \,,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn alle $a_i = 1$ sind.

b) Es gilt

$$\left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}\right)^n \le \prod_{i=1}^n a_i \le \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n .$$

In anderen Worten: Das *harmonische Mittel* $n/(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n})$ ist kleiner gleich dem *geometrischen Mittel* $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, und dieses ist kleiner gleich dem arithmetischen Mittel $(a_1 + \dots + a_n)/n$.

Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$

Wir wollen in diesen Hausübungen zeigen, dass es bis auf Umbenennung nur eine Menge reeller Zahlen gibt. Genauer zeigen wir den folgenden Satz:

Seien $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ zwei Mengen reeller Zahlen. Dann gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ mit

a) Die Abbildung φ ist bijektiv.

b) Die Abbildung φ ist monoton, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}_1$ gilt

$$x \le y \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) \le \varphi(y) .$$

c) Die Abbildung φ ist ein Körper-Homomorphismus.

Den Beweis führen wir in zwei Schritten. In Aufgabe Aufgabe 28 konstruieren wir φ und zeigen die ersten beiden Eigenschaften. In Aufgabe Aufgabe 29 zeigen wir, dass φ ein Körper-Homomorphismus ist.

Um die Ordnungen und Suprema in $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ besser unterscheiden zu können, schreiben wir $\le_1$ bzw. $\le_2$ für die Ordnungsrelation in $\mathbb{R}_1$ bzw. $\mathbb{R}_2$, und wir schreiben $\sup_{\mathbb{R}_1}$ bzw. $\sup_{\mathbb{R}_2}$ für das Supremum in $\mathbb{R}_1$ bzw. $\mathbb{R}_2$.

Sie wissen aus der Vorlesung, dass beide Körper $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthalten.[1] Wir nehmen also o.B.d.A. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_1$ und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_2$ an. Außerdem wissen wir, dass $\mathbb{Q}$ nur durch eine Ordnung zu einem angeordneten Körper gemacht werden kann. Insbesondere gilt also für alle rationalen Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$

$$p \le_1 q \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \le_2 q .$$

[1] Genau genommen gibt es einen monotonen Körper-Isomorphismus zwischen den beiden Teilkörpern rationaler Zahlen $\mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{R}_1$ und $\mathbb{Q}_2 \subseteq \mathbb{R}_2$. Um die Notation übersichtlich zu halten, identifizieren wir diese Teilmengen mittels dieses Isomorphismus und schreiben einfach $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{Q}_1$ und $\mathbb{Q}_2$.

Aufgabe 28

Für $x \in \mathbb{R}_1$ setzen wir

$$\varphi(x) := \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\} .$$

In dieser Aufgabe werden Sie nachweisen, dass dadurch eine monotone, bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ definiert wird. Zeigen Sie:

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}_1$ ist die Menge $\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\}$ in $\mathbb{R}_2$ nach oben beschränkt. Folglich ist φ wohldefiniert.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}_1$ gilt

$$\varphi(x) = \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p <_1 x\} .$$

c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_1$ gilt: $x <_1 y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) < \varphi(y)$.
Insbesondere ist φ injektiv.

d) Sei $y \in \mathbb{R}_2$. Wir setzen $x := \sup_{\mathbb{R}_1}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_2 y\}$. Dann gilt $\varphi(x) = y$. Folglich ist φ surjektiv.

Aufgabe 29

Sie werden nun nachweisen, dass die Abbildung φ ein Körper-Homomorphismus ist. Zeigen Sie:

a) Für jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\varphi(q) = q$. Insbesondere folgt damit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$.

b) Seien $x, y \in \mathbb{R}_1$ und $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\bar{q} <_1 x + y$. Dann gibt es rationale Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p + q = \bar{q}$ und $p <_1 x$, $q <_1 y$.

c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_1$ gilt $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

d) Seien $0 <_1 x, y \in \mathbb{R}_1$ und $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ mit $0 <_1 \bar{q} <_1 xy$. Dann gibt es rationale Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $pq = \bar{q}$ und $0 <_1 p <_1 x$, $0 <_1 q <_1 y$.
Hinweis: Gehen Sie analog zu Aufgabenteil b) vor.

e) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_1$ gilt $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.
Hinweis: Warum können wir o.B.d.A. $x \neq 0$ und $y \neq 0$ annehmen? Warum genügt es den Fall $x, y > 0$ nachzuweisen?