Analysis 1
7. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
2. Dezember 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Schranken

Betrachten Sie folgende Teilmengen der reellen Zahlen:

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ x + \frac{1}{x} \;\middle|\; \frac{1}{2} < x \leq 2 \right\} \\ B &:= \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{ Es gibt ein } y \in \mathbb{R} \text{ mit } (x+2)^2 + 4y^2 < 9. \right\} \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Infimum und das Supremum der Mengen A und B. Entscheiden Sie weiter, welche der Mengen A und B ein Maximum oder ein Minimum besitzen und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

Aufgabe 2 Eine Charakterisierung des Supremums

Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ ein angeordneter Körper und $A \subseteq \mathbb{K}$ eine nach oben beschränkte Menge. Zeigen Sie, dass für eine Zahl $s \in \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gilt $s = \sup(A)$.

(2) Die Zahl s ist eine obere Schranke für A und für alle $\epsilon \in \mathbb{K}$ mit $\epsilon > 0$ existiert ein $a \in A$ mit $s - \epsilon < a$.

Aufgabe 3 Supremum und Infimum für Mengenoperationen

Wir definieren für Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ \lambda \cdot A &:= \{\lambda \cdot a \mid a \in A\}, \\ A \cdot B &:= \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun für beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ folgende Aussagen:

(a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(b) Für $\lambda > 0$ gilt $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup(A)$.

(c) Gilt $A \subseteq \mathbb{R}_+$ und $B \subseteq \mathbb{R}_+$, so gilt: $\inf(A) \cdot \inf(B) \leq \inf(A \cdot B) \leq \inf(A) \cdot \sup(B) \leq \sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$.

(d) Diskutieren Sie, in welchen Fällen in Aufgabe 2(c) sogar Gleichheit gilt. Widerlegen Sie die Fälle, in welchen keine Gleichheit gilt, diese durch je ein Gegenbeispiel in $\mathbb{R}$.

Hausübungen

Aufgabe 25 Monotone Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, falls für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt:

$$f(a) \leq f(b).$$

(a) Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung, so ist für jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ auch die Bildmenge $f(A)$ nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(f(A)) \leq f(\sup(A)).$$

(b) Zeigen Sie, dass in (a) sogar Gleichheit gilt, wenn A ein maximales Element besitzt.

(c) Finden Sie eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\sup(f(A)) < f(\sup(A)).$$

Aufgabe 26 Ein nicht archimedisch angeordneter Körper

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es einen angeordneten Körper gibt, welcher das archimedische Axiom nicht erfüllt. Dazu machen wir einem kleinen Ausflug in die Algebra.

Vorbemerkung: Wir starten mit dem Raum reeller Polynome, welchen wir $\mathbb{R}[x]$ nennen: Dieser Raum enthalte alle reellen Funktionen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

mit $n \in \mathbb{N}$, sowie einer von 0 verschiedenen reellen Zahl a_n und beliebigen reellen Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

Nur für die Wahl $n = 0$ ist die Wahl $a_n = 0$ erlaubt: Die dadurch definierte Funktion f_0 nimmt für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert $f_0(x) = 0$ an. Wir nennen daher dieses Element $f_0 \in \mathbb{R}[x]$ die Nullfunktion in $\mathbb{R}[x]$ und schreiben $f_0 = 0$. Es ist das **einzige** Element $f \in \mathbb{R}[x]$, welches unendlich viele Nullstellen besitzt.

Wir definieren für ein von 0 verschiedenes Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit $a_n \neq 0$ die Zahl a_n den *Leitkoeffizienten* des Polynoms f und die Zahl n den *Grad* des Polynoms f.

Weiter definieren wir für Polynomfunktionen f und g wie folgt die Summe $(f + g) \in \mathbb{R}[x]$ und das Produkt $(f \cdot g) \in \mathbb{R}[x]$:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Dieser Raum $(\mathbb{R}[x], +, \cdot, 0)$ wird dadurch zu einem kommutativen Ring, dem Ring der Polynomfunktionen. Dies brauchen Sie nicht zu beweisen.

(a) Besitzt der Ring der Polynomfunktionen ein multiplikativ neutrales Element?

(b) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein Körper? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(c) Zeigen Sie für $\mathbb{R}[x]$ folgende Eigenschaft: Sind $f, g \in \mathbb{R}[x]$ zwei Polynomfunktionen, so folgt aus $f \cdot g = 0$, dass $f = 0$ oder $g = 0$ gilt.
Folgern Sie damit und den Ringeigenschaften, dass in $\mathbb{R}[x]$ die Kürzungsregel gilt: Sind $f, g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x]$, so folgt aus $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$, dass $g_1 = g_2$ gilt oder f das Nullpolynom ist.

Wie $\mathbb{Z}$ ist also $\mathbb{R}[x]$ ein kommutativer Ring mit 1, in welchem multiplikativ die Kürzungsregel gilt.

Mit dem gleichen Konstruktionsprinzip, mit welchem wir aus den ganzen Zahlen die rationalen Zahlen konstruiert haben, können wir aus dem Ring der Polynomfunktionen $\mathbb{R}[x]$ den *Körper der rationalen Funktionen über* $\mathbb{R}$ konstruieren, welchen wir mit $\mathbb{R}(x)$ bezeichnen: Sind f, g Polynome und $g \neq 0$, so ist

$$\frac{f}{g} \in \mathbb{R}(x)$$

eine *rationale Funktion*. Für die konkrete Konstruktion dieses Körpers würden wir also mit einer Äquivalenzrelation auf den geordneten Paaren in $\mathbb{R}[x] \times (\mathbb{R}[x] \setminus \{0\})$ starten und Addition und Multiplikation erklären. Anschließend würden wir zeigen, dass Summen und Produkte nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen und diese Operationen $\mathbb{R}(x)$ zu einem Körper machen, in welchen der Ring $\mathbb{R}[x]$ durch folgenden injektiven Ringhomomorphismus eingebettet ist:

$$\iota(f) := \frac{f}{1}.$$

Damit rechnen wir also mit Brüchen von Polynomen nach den gleichen Regeln wie mit Brüchen von ganzen Zahlen.

Anmerkung: Um die Elemente von $\mathbb{R}(x)$ als Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu identifizieren, müssen wir mit Definitionsbereichen vorsichtig sein: Ohne hier einige Konventionen zu treffen wären andernfalls Summen, Produkte und multiplikative Inverse nicht sinnvoll definiert, da die Nennerfunktion Nullstellen haben könnte. Wir ignorieren dieses Problem, indem wir uns den Körper $\mathbb{R}(x)$ nur abstrakt anschauen.

Nun können wir den positiven Kegel des Körpers $\mathbb{R}(x)$ definieren: Wir sagen $\frac{f}{g} > 0$, falls es einen Repräsentanten dieses Bruchs gibt mit

$$\frac{f}{g} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}, \text{ mit } a_n > 0 \text{ und } b_m > 0.$$

Mit $\mathbb{R}(x)_+$ bezeichnen wir die Menge aller nichtnegativen rationalen Funktionen. Insbesondere gilt per Definition $0 \in \mathbb{R}(x)_+$.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}(x)_+$ die Axiome (AK1), (AK2) und (AK3) erfüllt. Dadurch ist also $(\mathbb{R}(x), \mathbb{R}(x)_+)$ ein angeordneter Körper.

(e) Identifizieren Sie $\mathbb{Q}$ als Unterkörper in $\mathbb{R}(x)$.

(f) Zeigen Sie, dass der angeordnete Körper $\mathbb{R}(x)$ nicht das archimedische Axiom erfüllt.