Analysis 1
6. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
25. November 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot\,; \leq)$ ein angeordneter Körper. Machen Sie bei den folgenden Beweisen deutlich, an welcher Stelle des Beweises Sie welches Axiom verwenden.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Axiome eines angeordneten Körpers: Für alle $x, y \in \mathbb{K}_+$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$x < y \qquad \Longrightarrow \qquad x^n < y^n \,.$$

b) Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle $x \in \mathbb{K}_+$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2 \,.$$

Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot; \leq)$ ein angeordneter Körper, und seien $a, b, \lambda \in \mathbb{K}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

$$a < \lambda a + (1-\lambda)b < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < \lambda < 1 \,.$$

Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch?

Aufgabe 3 Positive Kegel

Sei $V := \mathbb{Q}^2$ oder ein anderer Vektorraum über den rationalen Zahlen. Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *positiver Kegel*, falls gilt

(C1) $C \cap -C = \{0\}$, wobei $-C := \{-x \mid x \in C\}$.

(C2) Für alle $x, y \in C$ gilt $x + y \in C$.

(C3) Für alle $0 \leq \lambda \in \mathbb{Q}$ und $x \in C$ gilt $\lambda x \in C$.

a) Skizzieren Sie mindestens 3 verschiedene positive Kegel in $\mathbb{Q}^2$. (Abhängig von der Körnung Ihres Blattes dürfen Sie auch in $\mathbb{R}^2$ skizzieren.)

b) Zeigen Sie: Ist $C \subseteq V$ ein positiver Kegel, so wird durch

$$x \leq_C y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad y - x \in C$$

eine Ordnungsrelation auf V definiert, und es gilt $C = \{x \in V \mid 0 \leq x\}$.

c) Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}^2$ durch

$$(x_1, x_2) \leq_{\text{lex}} (y_1, y_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x_1 < y_1 \text{ oder } (x_1 = y_1 \text{ und } x_2 \leq y_2)\,.$$

Diese Ordnungsrelation heißt oft auch die *lexikographische Ordnung*. Können Sie sich denken woher der Name kommt? Machen Sie sich klar, dass $\leq_{\text{lex}}$ tatsächlich eine Ordnungsrelation ist.

d) Skizzieren Sie die Menge

$$C_{\text{lex}} := \{x \in \mathbb{Q}^2 \mid 0 \leq_{\text{lex}} x\}\,.$$

Ist C_{lex} ein positiver Kegel?

Wir haben in Aufgabenteil b) gesehen, dass jeder positive Kegel eine Ordnungsrelation induziert. Es stellt sich nun die Frage, ob alle Ordnungsrelationen von dieser Form sind.

e*) [1]Finden Sie eine Ordnungsrelation $\leq_{\text{igitt}}$ auf $\mathbb{Q}^2$, so dass die Menge $C_{\text{igitt}} := \{x \in \mathbb{Q}^2 \mid 0 \leq x\}$ kein positiver Kegel ist. Charakterisieren Sie alle Ordnungsrelationen $\leq$ auf V, so dass $C_{\leq} := \{x \in V \mid 0 \leq x\}$ ein positiver Kegel ist.

Hausübungen

Aufgabe 21

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot\,; \leq)$ ein angeordneter Körper. Leiten Sie aus den Axiomen eines angeordneten Körpers ab: Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}_+$ mit $a + b \geq c$ gilt

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}\,.$$

Machen Sie in Ihrem Beweis deutlich, an welcher Stelle Sie welches Axiom verwendet haben.

Aufgabe 22

In der Vorlesung wurde gezeigt: Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot\,; \leq)$ ein angeordneter Körper und $\bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{K}$, dann erfüllt $(\bar{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{K}}, f)$ mit $f : \bar{\mathbb{N}} \to \bar{\mathbb{N}},\ \bar{n} \mapsto \bar{n} + 1_{\mathbb{K}}$ die Peano-Axiome. Also existiert nach Satz 1.13 genau eine bijektive Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ mit $\psi(0_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{K}}$ und $\psi(n') = \psi(n) + 1_{\mathbb{K}}$.

Zeigen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\psi(n +_{\mathbb{N}} m) = \psi(n) +_{\mathbb{K}} \psi(m)\,, \qquad\qquad \psi(n \cdot_{\mathbb{N}} m) = \psi(n) \cdot_{\mathbb{K}} \psi(m)\,,$$

wobei zur Verdeutlichung $+_{\mathbb{N}}$ und $\cdot_{\mathbb{N}}$ bzw. $+_{\mathbb{K}}$ und $\cdot_{\mathbb{K}}$ die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{K}$ bezeichnet.

Aufgabe 23

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot\,; \leq)$ ein angeordneter Körper. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ durch einen injektiven Ring-Homomorphismus in $\mathbb{K}$ einbetten lassen (Satz 3.5). In diesem Sinne gilt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}$.

Orientieren Sie sich an diesem Beweis, und zeigen Sie: Durch

$$i\big([(a,b)]\big) := ab^{-1}$$

für $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist ein injektiver Körper-Homomorphismus $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ definiert.

Achten Sie auf eine sorgfältige Ausarbeitung. Insbesondere sollten Sie jeden Schritt begründen.

[1] Diese Sternchen-Aufgabe ist zusätzlich und hat voraussichtlich einen etwas höherern Schwierigkeitsgrad.