Analysis 1
5. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
18. November 2010

In diesem Übungsblatt wollen wir uns mit dem euklidschen Algorithmus, Kettenbrüchen und Fareys Schema rationaler Zahlen beschäftigen. Dazu wollen wir die Gültigkeit folgenden Satzes vorraussetzen.
Satz: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit

$$m = a \cdot n + b \quad \text{und} \quad b < n.$$

Dieser Satz formuliert also, dass wir in $\mathbb{N}$ auf eindeutige Weise mit Rest teilen können.

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Der euklidische Algorithmus für natürliche Zahlen

Sind $p, q \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $p \neq 0$ und $q \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a_0 \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n, b_0, ..., b_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{array}{rcl} p & = & a_0 \cdot q + b_0, \quad b_0 < q, \\ q & = & a_1 \cdot b_0 + b_1, \quad b_1 < b_0, \\ b_0 & = & a_2 \cdot b_1 + b_2, \quad b_2 < b_1, \\ ... & = & ... \\ b_{n-2} & = & a_n \cdot b_{n-1} + 0, \quad 0 < b_{n-1} \end{array}$$

und $b_n = 0$.

(a) Führen Sie den Algorithmus für die Zahlen $p = 9$ und $q = 32$ durch.

(b) Beweisen Sie, dass die Zahlen $a_0, ..., a_n$ und $b_0, ..., b_n$ eindeutig bestimmt sind.

(c) Wo finden Sie in diesem Schema den größten gemeinsamen Teiler von p und q?

(d) Warum bricht der euklidische Algorithmus eigentlich immer nach endlich vielen Schritten ab: D. h., warum existiert immer ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n = 0$?

Aufgabe 2 Endliche regelmäßige Kettenbrüche

Sei $x \in \mathbb{Q}$ eine positive rationale Zahl. Ein *endlicher regelmäßiger Kettenbruch* ist eine Darstellung dieser Zahl der Form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots + \frac{1}{a_n}}}}$$

mit $a_0 \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für alle $0 < i \leq n$. Jeder Zähler dieses ineinandergeschachtelten Bruchs ist also gleich 1. In diesem Fall schreiben wir auch abkürzend

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

(a) Stellen Sie die Zahlen $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{32}$ als Kettenbrüche dar.

(b) Welche rationalen Zahlen werden von den Kettenbrüchen $[1; 2, 3, 4]$ und $[2; 2, 2, 2, 2, 2]$ repräsentiert?

(c) Betrachten Sie die rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Was hat eine Kettenbruchentwicklung von x mit dem euklidschen Algorithmus aus der vorigen Aufgabe zu tun?

Aufgabe 3 Ein weiterer Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$

In dieser Aufgabe wollen wir mit Hilfe von Kettenbrüchen zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann. Dafür können Sie ohne Beweis voraussetzen, dass jede positive rationale Zahl genau zwei Darstellungen als endlicher regelmäßiger Kettenbruch besitzt. Mit $\sqrt{2}$ bezeichnen wir dabei eine Zahl mit der Eigenschaft $\sqrt{2} > 0$ und $\sqrt{2}^2 = 2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ keine Darstellung als endlicher regelmäßiger Kettenbruch besitzen kann und damit keine rationale Zahl ist: Nehmen Sie an, $\sqrt{2}$ besitzt eine solche Darstellungen und folgern Sie daraus mit Hilfe von (a) und der Eingangsbemerkung einen Widerspruch.

(c) Angenommen, unendliche regelmäßige Kettenbrüche machten Sinn, welche Darstellung hätte $\sqrt{2}$ als unendlicher regelmäßiger Kettenbruch?

Aufgabe 4 Teilen mit Rest

Falls Sie noch Zeit und Lust haben, beweisen Sie den Satz aus der Einleitung dieses Übungsblattes.

Hausübungen

Aufgabe 19 Fareys Brüche Schema

Wir wollen alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ in ein Zahlenschema schreiben. Die ersten drei Zeilen unseres Schemas werden dabei wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{lccccc}
\mathbb{Q}_1: & \frac{0}{1} & & & & \frac{1}{1} \\[2em]
\mathbb{Q}_2: & \frac{0}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} \\[2em]
\mathbb{Q}_3: & \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{1}.
\end{array}$$

Wir starten unser Schema also mit der Menge $\mathbb{Q}_1 := \{0, 1\}$. Um der Konstruktionsvorschrift willen, schreiben wir die Elemente dieser Menge „künstlich" als einen Bruch:

$$\mathbb{Q}_1 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Nun wollen wir für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge $\mathbb{Q}_k$ rekursiv konstruieren. Dazu folgende Notation: Wir nennen zwei Elemente $x, z \in \mathbb{Q}_k$ mit $x < z$ *benachbart*, falls es kein Element $y \in \mathbb{Q}_k$ gibt, mit $x < y < z$.
Um nun $\mathbb{Q}_{k+1}$ aus $\mathbb{Q}_k$ zu konstruieren, gehen wir wie folgt vor:

- Setze $x \in \mathbb{Q}_{k+1}$, falls $x \in \mathbb{Q}_k$ gilt.
- Sind $\frac{p}{m}$ und $\frac{q}{n}$ benachbart in $\mathbb{Q}_k$, so bilde $x = \frac{p+q}{m+n}$. Falls $m + n \leq k + 1$ gilt, setze $x \in \mathbb{Q}_{k+1}$. Ist $m + n > k + 1$, so ignoriere x. Hierbei darf $x = \frac{p+q}{m+n}$ weder gekürzt noch erweitert werden.

Auf diese Weise entsteht eine Kette von Teilmengen $\mathbb{Q}_k \subseteq \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{Q}_2 \subseteq \mathbb{Q}_3 \subseteq \ldots$$

Dies ist *John Fareys Schema* rationaler Zahlen zwischen 0 und 1.

(a) Setzen Sie das Schema bis $\mathbb{Q}_5$ fort.

(b) Zeigen Sie: Für alle rationalen Zahlen $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$ und $d > 0$ gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion nach $k \in \mathbb{N}$: Sind $\frac{p}{m}, \frac{q}{n} \in \mathbb{Q}_k$ benachbart, so gilt $qm - pn = 1$.
Betrachten Sie hierbei im Induktionsschritt benachbarte Zahlen aus $\mathbb{Q}_k$ und diskutieren Sie die Fälle, dass diese Zahlen entweder benachbart in $\mathbb{Q}_{k+1}$ bleiben oder nicht mehr benachbart in $\mathbb{Q}_{k+1}$ sind.

(d) Zeigen Sie: Ist $\frac{p}{m} \in \mathbb{Q}_k$, so ist $\frac{p}{m}$ bereits vollständig gekürzt.

Hinweise: Für Aufgabenteil (b) kann es sinnvoll sein, die Ausgangsbrüche $\frac{a}{b}$ $\left(\text{bzw. } \frac{c}{d}\right)$ zu erweitern. Die Aussage in Aufgabenteil (d) können Sie aus der Aussage in Aufgabenteil (c) folgern.

Zusatzaufgabe: Erstaunliche Eigenschaften von Fareys Schema

(e) Zeigen Sie: Sind $\frac{p}{m} < \frac{q}{n}$ benachbart in $\mathbb{Q}_k$, so folgt aus $\frac{p}{m} < \frac{r}{s} < \frac{q}{n}$ bereits $s \geq m + n$.

(f) Folgern Sie nun: Ist $0 \leq x \leq 1$ mit $x \in \mathbb{Q}$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathbb{Q}_k$. Machen Sie sich klar, dass das bedeutet:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_k = [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Hinweise: Für Aufgabenteil (e) kann es sinnvoll sein, die rationale Zahl $\frac{q}{n} - \frac{p}{m}$ einerseits zu berechnen, andererseits von folgender Identität gebrauch zu machen:

$$\frac{q}{n} - \frac{p}{m} = \left(\frac{q}{n} - \frac{r}{s}\right) + \left(\frac{r}{s} - \frac{p}{m}\right)$$

und anschließend die rechte Seite abzuschätzen.
In Aufgabenteil (f) empfehlen wir, per Induktion zu beweisen, dass jeder gekürzte Bruch der Form $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ für $a > 0$ und $b > 0$ bereits in $\mathbb{Q}_b$ liegt.

Aufgabe 20 Fibonacci Zahlen und Kettenbrüche

Die Fibonacci Zahlen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind über folgende Rekursionsvorschrift definiert:

$$f_0 := 1, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n.$$

Diese Rekursionsvorschrift ist Ihnen vielleicht schon im Tutorium begegnet.

(a) Bestimmen Sie die ersten 10 Fibonacci Zahlen.

(b) Bestimmen Sie eine endliche regelmäßige Kettenbruchdarstellungen von $\frac{f_6}{f_5}$ explizit.

(c) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endliche regelmäßige Kettenbruchdarstellungen von $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.