Analysis 1
4. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
10. November 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Addition auf $\mathbb{Z}$

In der Vorlesung wurden die Elemente von $\mathbb{Z}$, d.h. die Äquivalenzklassen von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, als diagonale Streifen von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ veranschaulicht (vgl. Abb. 1). Erklären Sie geometrisch, wie sich zwei solche Streifen $n, m \in \mathbb{Z}$ addieren lassen.

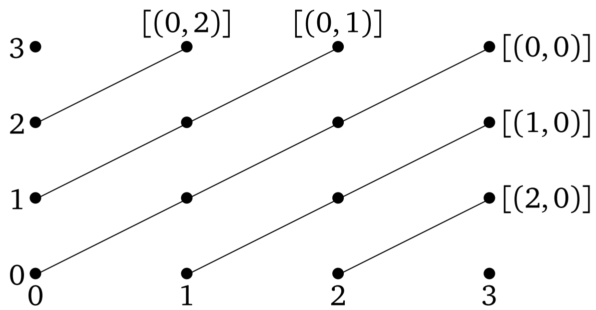

Abbildung 1: $\mathbb{Z}$ als Streifen

Aufgabe 2

Für zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ schreiben wir $n \mid m$, falls es eine ganze Zahl $0 < k \in \mathbb{N}$ gibt mit $m = n \cdot k$.

a) Zeigen Sie, dass $\mid$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert, d.h. die Relation $\mid$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

b) Finden Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, für die weder $n \mid m$ noch $m \mid n$ gilt.
Folgern Sie, dass es (sogar endliche) Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt, die kein Minimum besitzen, d.h. es gibt kein Element $a \in A$ mit $a \mid b$ für alle $b \in A$. (Vergleichen Sie mit Aufgabe 7 in den 2. Hausübungen.)

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden Relation auf $\mathbb{Z}$:

$$n \sim m \quad :\Longleftrightarrow \quad n = m \quad \text{oder} \quad n = -m\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Damit ist auch das Symbol $\sim$ gerechtfertigt.)

Für ein Element $n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $[n]$ die entsprechende Äquivalenzklasse und mit $(\mathbb{Z}/\sim) := \{[n] : n \in \mathbb{Z}\}$ den entsprechenden Quotienten.

b) Für zwei Elemente $n, m \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$[n] \bullet [m] := [n \cdot m] ,$$

wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\bullet$ eine wohldefinierte Operation auf $\mathbb{Z}/\sim$ definiert.

c) Ist auch durch

$$[n] \oplus [m] := [n + m]$$

eine wohldefinierte Operation auf $\mathbb{Z}/\sim$ gegeben? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Hausübungen

Aufgabe 14 Kürzungsregel der Multiplikation

Zeigen Sie die folgende Kürzungsregel für die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$: Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$n \cdot k = m \cdot k \qquad \Longrightarrow \qquad n = m .$$

Hinweis: Warum genügt es den Fall $k \in \mathbb{N}$ zu betrachten?

Folgern Sie: Für gegebene Zahlen $0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$ besitzt die Gleichung $m \cdot x = n$ höchstens eine ganzzahlige Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 15

Für zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir eine Operation $*$ via

$$x * y := \begin{cases} x \cdot y & \text{für } x \geq 0 \text{ oder } y \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $x \cdot y$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) Die Operation $*$ ist assoziativ und kommutativ.

b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $n * 1 = n = 1 * n$.

c) Für alle natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ und alle ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(n + m) * (x + y) = n * x + m * x + n * y + m * y .$$

d) Durch welche Rechengesetze unterscheidet sich die Operation $*$ von der üblichen Multiplikation auf $\mathbb{Z}$?

e) Diskutieren Sie, ob diese Operation eine sinnvolle Fortsetzung der Multiplikation von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ ist. Erörtern Sie dabei insbesondere, ob diese Operation dazu geeignet wäre, alltägliche ganzzahlige Rechnungen, z. B. Rechnungen mit Guthaben und Schulden, zu modellieren.

f) Wieso gilt eigentlich in $\mathbb{Z}$ die Regel „Minus mal Minus gleich Plus“? Kann diese Regel aus der Multiplikation auf $\mathbb{N}$ hergeleitet werden?

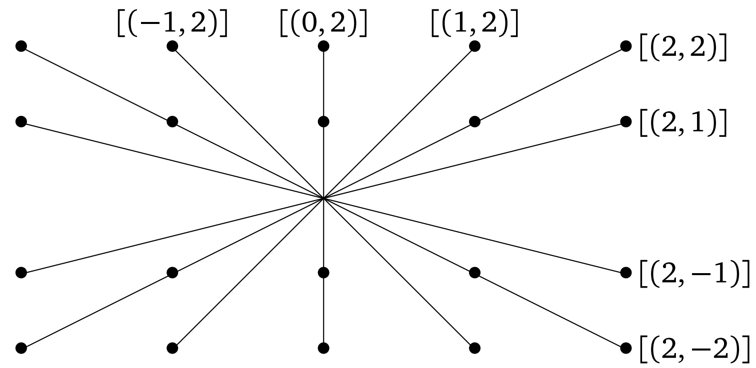

Abbildung 2: $\mathbb{Q}$ als Ursprungsgeraden

Aufgabe 16 Addition auf $\mathbb{Q}$

In der Vorlesung wurden Elemente von $\mathbb{Q}$, d.h. die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, durch Ursprungsgeraden veranschaulicht (vgl. Abb. 2). Erklären Sie geometrisch, wie sich zwei solche Geraden $x, y \in \mathbb{Q}$ addieren lassen.

Aufgabe 17 Zusatzaufgabe: Multiplikation auf $\mathbb{Q}$

Erklären Sie geometrisch, wie sich zwei Geraden $x, y \in \mathbb{Q}$ multiplizieren lassen.