Analysis 1
3. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
4. November 2010

Ordnungsrelationen

In der Vorlesung haben wir bereits die Axiome für eine Ordnungsrelation kennen gelernt:
Ist Ω eine Menge, dann heißt eine Relation $\leq$ eine *Ordnungsrelation*, wenn die Relation folgende drei Bedingungen erfüllt:

(Ord 1) Die Relation ist reflexiv: Es ist $x \leq x$ für alle Elemente $x \in \Omega$.

(Ord 2) Die Relation ist antisymmetrisch: Sind $x, y \in \Omega$, dann folgt aus $x \leq y$ und $y \leq x$ bereits $x = y$.

(Ord 3) Die Relation ist transitiv: Für Elemente $x, y, z \in \Omega$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$, dass auch $x \leq z$ gilt.

In diesem Fall nennen wir $(\Omega, \leq)$ eine geordnete Menge.
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $(\mathbb{N}, \leq)$ eine geordnete Menge ist.

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Zur Ordnung auf den natürlichen Zahlen

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $(a + c) < (b + c)$, so folgt $a < b$.

(b) Ist $a < b$ und $c \leq d$, so folgt $a + c < b + d$.

(c) Ist $a < b$ und $c > 0$, so folgt $a \cdot c < b \cdot c$.

Aufgabe 2 Eine geordnete Menge

Wir definieren nun auf der Menge $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \subseteq \mathbb{N}$ folgende Relation:
Es gelte für $x, y \in \Omega$ genau dann $x \preceq y$, falls es ein $z \in \Omega$ gibt mit $y = x \cdot z$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\Omega, \preceq)$ eine geordnete Menge ist.

(b) Finden Sie alle Elemente $x \in \Omega$ mit $x \preceq 12$.

(c) Wie können Sie diese Relation anschaulich beschreiben?

(d) Visualisieren Sie sich die Ordnungsrelation $\preceq$ auf Ω durch einen *gerichteten Graphen*, indem Sie von einem Element x zu einem Element y einen Pfeil zeichnen, falls $x \leq y$ gilt. Die Spitze möge dabei auf das größere Element zeigen.
Überlegen Sie sich, welche Pfeile Sie der Übersichtlichkeit wegen auf Grund der Axiome für eine Ordnungsrelation weglassen können.
Hier ein Beispiel eines gerichteten Graphen für die geordnete Menge $(\{1,2,3,4\},\preceq)$:

$$\begin{tikzcd} & 3 & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 4. \end{tikzcd}$$

Wir wollen abschließend noch zwei Begriffe einführen: Ist $(\Omega,\leq)$ eine geordnete Menge, dann heißt ein Element $x \in \Omega$ ein *minimales Element*, falls für ein beliebiges $y \in \Omega$ mit $y \leq x$ bereits $y = x$ folgt. Ein Element $x \in \Omega$ heißt ein *maximales Element*, falls für ein beliebiges $y \in \Omega$ mit $x \leq y$ bereits $y = x$ folgt.

(e) Untersuchen Sie die geordnete Menge $(\Omega,\preceq)$ auf maximale und minimale Elemente.

Aufgabe 3 Gegenbeispiele

Konstruieren Sie auf einer von Ihnen gewählten Menge Beispiele für Relationen, welche je zwei der Axiome einer Ordnungsrelation erfüllen, aber das dritte nicht.

Aufgabe 4 Die Subtraktion auf den natürlichen Zahlen I

Seien $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ mit $n = m + x$. Wir schreiben auch $n - m := x$ und nennen x die *Differenz* von n und m.
Zeigen Sie, dass für beliebige Zahlen $m,n \in \mathbb{N}$ höchstens eine Differenz von n und m existiert. In diesem Sinne ist $x = n - m$ ein wohldefinierter Ausdruck.

Aufgabe 5 Die Subtraktion auf den natürlichen Zahlen II - Falls noch Zeit ist

Seien nun $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $a \geq c$ und $b \geq d$, dann gilt $(a-c)+(b-d) = (a+b)-(c+d)$.

(b) Ist $a \geq c$, $b \geq d$ und $(a-c) \geq (b-d)$, dann gilt $(a-c)-(b-d) = (a+d)-(b+c)$.

(c) Ist $a \geq c$ und $b \geq d$, dann gilt $(a-c)\cdot(b-d) = (a\cdot b + c\cdot d) - (a\cdot d + b\cdot c)$.

Hausübungen

Aufgabe 10 Endliche geometrische Reihe

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion folgende Identität: Für alle Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \notin \{0,1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Aufgabe 11 Zur Ordnung auf den natürlichen Zahlen

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass **genau** eine der folgenden Aussagen gilt:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Aufgabe 12 Teilmengenrelation und Ordnung

Sei Ω eine beliebige Menge und ihre Potenzmenge sei $\mathscr{P}(\Omega)$.

(a) Wir schreiben $A \leq B$, falls $A \subseteq B$ gilt. Zeigen Sie, dass diese Relation eine Ordnungsrelation auf $\mathscr{P}(\Omega)$ definiert.

(b) Gilt für $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ immer $A \leq B$, $A = B$ oder $A \geq B$? Charakterisieren Sie alle Mengen Ω, für welche je zwei beliebige Mengen $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ immer in diesem Sinne vergleichbar sind.

(c) Bestimmen Sie für die Menge $\Omega := \{1, 2, 3\}$ die Ordnungsstruktur für $\mathscr{P}(\Omega)$, indem Sie den zugehörigen gerichteten Graphen angeben. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 13 Der Rekursionssatz von Dedekind

Sei A eine nicht leere Menge, $a \in A$ ein Element und $f : A \to A$ eine Selbstabbildung. Zeigen Sie folgende Aussage: Unter obigen Vorraussetzungen gibt es genau eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ mit $\varphi(0) = a$ und $\varphi(n') = f(\varphi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hierbei bezeichnet n' den Nachfolger der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$.