Analysis 1
2. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

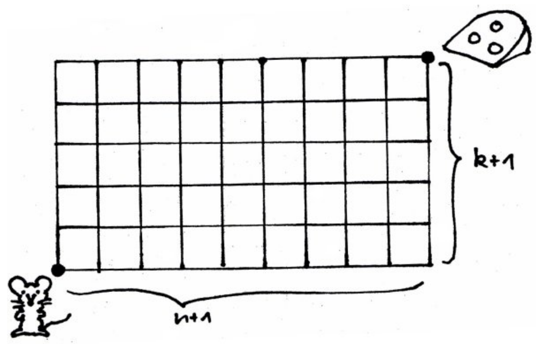
Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
28. Oktober 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1

Stellen Sie sich ein rechteckiges umrandetes Gitter aus $n+1$ vertikalen Linien und $k+1$ horizontalen Linien vor (inklusive der Ränder).



a) Am linken unteren Gitterpunkt sitzt eine Maus. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann die Maus zum Käse oben rechts kommen, wenn sie nur entlang der Gitterlinien nach oben und nach rechts laufen kann? (Nur so kommt sie dem Käse näher.)
Hinweis: Wie viele Schritte braucht die Maus zum Käse?

b) Begründen Sie unter Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten als Wege im Gitter die folgende Rechenregel für natürliche Zahlen k, n mit $1 \le k \le m$:

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1}$$

c) Beweisen Sie die linke Formel in (1).

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Eine n-elementige Menge besitzt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen.

Aufgabe 3

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich vollständig in Primfaktoren zerlegen, d.h. es gibt Primzahlen $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$ mit

$$n = \prod_{k=1}^{m} p_k \,.$$

Dabei zählt auch $n = p_1$ als Produkt vom Primzahlen (mit $m = 1$).

Beweis: Die Zahl $n = 2$ ist eine Primzahl, insbesondere also das Produkt von Primzahlen (Induktionsanfang).
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei jede natürliche Zahl $2 \leq k \leq n$ das Produkt von Primzahlen (Induktionsannahme). Wir zeigen, dass auch $n+1$ das Produkt von Primzahlen ist (Induktionsschritt): Dabei unterscheiden wir zwei Fälle: Ist die Zahl $n+1$ selbst eine Primzahl, so ist sie insbesondere das Produkt von Primzahlen. Ist $n+1$ keine Primzahl, so gibt es zwei Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_1, n_2 \leq n$ und $n + 1 = n_1 \cdot n_2$. Nach Induktionsannahme sind n_1 und n_2 Produkt von Primzahlen, d.h. es gibt Primzahlen $p_1, \ldots, p_{m_1} \in \mathbb{N}$ und $q_1, \ldots, q_{m_2} \in \mathbb{N}$ mit

$$n_1 = \prod_{k=1}^{m_1} p_k \,, \qquad\qquad n_2 = \prod_{k=1}^{m_2} q_k \,.$$

Damit ist auch $n + 1 = n_1 n_2 = \prod_{k=1}^{m_1} p_k \cdot \prod_{k=1}^{m_2} q_k$ das Produkt von Primzahlen. In beiden Fällen ist also $n+1$ das Produkt von Primzahlen.
Damit ist gezeigt, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das Produkt von Primzahlen ist (Induktionsschluss).

a) Warum genügt es beim Induktionsanfang den Fall $n = 2$ nachzurechnen? Würde es auch reichen den Fall $n = 5$ nachzurechnen?

b) Warum darf die Induktionsannahme lauten, dass die Aussage für jede Zahl $2 \leq k \leq n$ gilt? Beweisen Sie, dass man auch nach folgendem Schema eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zeigen kann:

   1. Zeige: $A(0)$ ist wahr.
   2. Zeige: Ist $A(k)$ für alle $k \leq n$ wahr, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Hausübungen

Aufgabe 5

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Zahlen a, b gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ .$$

Bemerkung: In der Vorlesung wurde der Beweis *ohne* vollständige Induktion geführt.

Aufgabe 6 Distributivgesetz

Zeigen Sie mit Hilfe der Peano-Axiomen und der Kommutativität und Assoziativität vom Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen: Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(n+m) \cdot k = (n \cdot k) + (m \cdot k) \qquad \text{und} \qquad k \cdot (n+m) = (k \cdot n) + (k \cdot m) \ .$$

Machen Sie im Beweis deutlich, wo Sie welche Rechenregel verwenden.

Aufgabe 7 Kleinste Elemente

Zeigen Sie: Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ hat ein Minimum, d.h. es gibt ein Element $a_{\min} \in A$ mit $a_{\min} \leq a$ für alle $a \in A$.
Hinweis: Formulieren Sie vorher exakt, welche Aussage Sie beweisen wollen.

Aufgabe 8 Zusatzaufgabe (freiwillig)

Sei A eine Menge und $\varphi : A \to A$ eine Abbildung, welche die ersten beiden Peano-Axiome (P1) und (P2) erfüllt. Für zwei Elemente $a, b \in A$ schreiben wir $a \leq b$, falls es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$b = \underbrace{\varphi\big(\varphi(\ldots\varphi(}_{k\text{-mal}}a)\ldots)\big) \ .$$

Sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Ein Element $b_{\min} \in A$ heißt *Minimum* von B, falls $b_{\min} \in B$ und $b_{\min} \leq b$ für alle $b \in B$ gilt.

Betrachten Sie das dritte Peano-Axiom (P3) und das folgende Axiom (M):

(M) Jede nichtleere Teilmenge $B \subseteq A$ besitzt ein Minimum.

a) Machen Sie sich klar, dass Sie in Aufgabe Aufgabe 7 der Hausübungen gezeigt haben: Erfüllt A mit der Abbildung φ das Induktionsaxiom (P3), so gilt auch (M).

b) Zeigen Sie nun auch die Umkehrung: Erfüllt A mit der Abbildung φ das Axiom (M), so gilt auch das Induktionsaxiom (P3).

In diesem Sinne ist das Axiomensystem (P1), (P2), (P3) äquivalent zum System (P1), (P2), (M).