Analysis I
1. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
21. Oktober 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Vollständige Induktion I

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt folgende Identität:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Achten Sie darauf, Ihren Beweis sorgfältig aufzuschreiben.

Aufgabe 2 Vollständige Induktion II

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + 1$. Zeigen Sie, dass aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt. Ist damit $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 3 Kürzungsregel

Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion folgende *Kürzungsregel*: Für alle $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$m + k = n + k \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

Aufgabe 4 Peano-Axiome

Finden Sie zu jedem Peano-Axiom eine Zahlenmenge mit Nachfolgerabbildung, die genau dieses eine Axiom nicht erfüllt, allen weiteren Axiomen aber genügt.
Folgern Sie, dass die Peano Axiome ein unabhängiges System von Axiomen bilden.

Hausübungen

Aufgabe 1 Griechisches Alphabet

Erstellen Sie ein handgeschriebenes griechisches Alphabet in Klein- und Großbuchstaben inkl. Benennung. (Die letzte Zeile Ihrer Tabelle könnte z. B. die Symbole ω und Ω mit der Benennung *Omega* enthalten.)

Aufgabe 2 Peano-Axiome

Sei $X = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller geraden Zahlen. Finden Sie eine Nachfolgerabbildung $f : X \to X$, so dass die Menge X mit der Nachfolgerabbildung f den Peano-Axiomen genügt.

Aufgabe 3 Rechenoperationen auf den natürlichen Zahlen

Wir bezeichnen in dieser Aufgabe mit n' den Nachfolger einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$. Leiten Sie aus den Peano-Axiomen ab: Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ gelten folgende Rechenregeln:

(a) $0 + n = n$.

(b) $m' + n = (m + n)'$.

(c) $m + n = n + m$.

Aufgabe 4 Das Produktzeichen

Definieren Sie in Analogie zum Summenzeichen $\sum$ rekursiv das Produktzeichen $\prod$, um Ausdrücke der Form $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ zu präzisieren.
Was halten Sie als Definition für ein Produkt $\prod_{k=m}^{n} a_k$ mit $m > n$ für eine sinnvolle Konvention? Beschreiben Sie kurz, warum Sie Ihren Vorschlag für sinnvoll halten.