Analysis 1
15. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
17. Februar 2010

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Gegenbeispiele für beliebige Vereinigungen und Schnitte

Wir wollen in dieser Aufgabe sehen, dass beliebige Durchschnitte offener Mengen nicht offen und beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein brauchen.

(a) Betrachten Sie die offenen Mengen $I_n := \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht offen ist.

(b) Finden Sie eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ eine abgeschlossene Menge $A_i \subseteq \mathbb{R}$, so dass $\bigcup_{i\in I} A_i$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.

Lösung

(a) Klar: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$. Diese Menge ist nicht offen.

(b) Wähle z. B. $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und wähle $A_n := \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$. Dann gilt: $\bigcap_{n\in I} A_n =]0, 3[$, also ist die beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen.

Aufgabe 2 Unstetige reelle Funktionen

In dieser Aufgabe sehen wir zwei klassische Beispiele für reelle Funktionen, die in mindestens einem Punkt unstetig sind.

Die Heavyside Funktion

Wir betrachten folgende reelle Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass H in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass H in 0 unstetig ist.

(b') Zeigen Sie mit Hilfe des $\epsilon - \delta$ Kriteriums, dass H in 0 unstetig ist.

(c) Finden Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$, für die $f^{-1}(U)$ nicht offen ist.

Lösung

(a) Brauch ich, denke, ich nicht vormachen; leicht.

(b) Wähle z. B. $x_n := -\frac{1}{n}$. Offensichtlich: $\lim_{n\in\mathbb{N}} H(x_n) = 0 \neq 1 = H\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)$.

(b') Sei $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für jedes δ: $|0 + \frac{\delta}{2}| < \delta$, aber $|H(0) - H\left(-\frac{\delta}{2}\right)| = |1| > \epsilon$. Damit gibt es kein $\delta > 0$ zu diesem $\epsilon > 0$, dass dem $\epsilon - \delta$ Kriterium genügt.

(c) Z. B.: $H^{-1}(]0,2[) = [0,\infty]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Die Dirichlet Funktionen

Wir betrachten folgende reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Lösung

Ist $x \in \mathbb{Q}$, so definiert $x_n := x + \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ eine gegen x konvergente Folge, wobei jedes Folgenglied irrational ist. Hier gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = 0$, aber $f(x) = 1$.
Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$. Hier gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = 1$, aber $f(x) = 0$.
Damit ist f in jedem Punkt aus $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ unstetig.

Aufgabe 3 Der Abschluß von Mengen

Aus der Vorlesung kennen Sie für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$. Dies ist A vereinigt mit allen Häufungspunkten $x \in X$ von Folgen in A.
Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist.

Lösung

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, also eine Folge, deren Folgenglieder allesamt aus der Menge A stammen, und konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so ist dieser Grenzwert in $\overline{A}$.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{A}$, und konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $x \in X$, so müssen wir zeigen: $x \in \overline{A}$. Wähle nun für jede natürliche Zahl zu jedem Folgenglied x_n ein Element $a_n \in A$ mit $d(x_n, a_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Da jedes Element aus $\overline{A}$ ein Häufungspunkt einer Folge in A ist oder sogar eine Element von A ist, existieren diese Elemente $a_n \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x:
Sei $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^N < \epsilon$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > N$ und mit $d(x, x_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$ für alle $n > n_0$. Dann gilt für $n > n_0$:

$$d(x, a_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^N < \epsilon.$$

Damit ist jeder Häufungspunkt von $\overline{A}$ ein Häufungspunkt von A, also ist A abgeschlossen.

Aufgabe 4 Sandwich Theorem alte Version

Betrachten Sie folgende Situation: Gegeben seien drei reelle Funktionen $f_1, f_2, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte:

$$f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x).$$

Weiter seien f_1 und f_2 im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Was können Sie für g im Punkt x_0 folgern?

Lösung

Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, so gilt $f_1(x_0) = \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_1(x_n) \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} g(x) \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_2(x_n) = f_2(x_0)$. Analog mit $\liminf_{n\in\mathbb{N}}$. Da $f_1(x_0) = f_2(x_0) = g(x_0)$ folgt $\liminf g(x_n) = \limsup g(x_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} g(x_n) = g(x_0)$, also ist g in x_0 stetig.

Sandwich Theorem

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = g = \lim_{n\to\infty} c_n$ und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so wissen wir aus der Vorlesung, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen g konvergiert.

(a) Formulieren und beweisen Sie daraus ein „Sandwich Theorem stetiger reelleer Funktionen“.

(b) Zeigen Sie nun, dass folgende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist:

$$g(x) := \begin{cases} 1 & x \in \left]-\infty, -1\right[\,\cup\, \left]1, \infty\right[\\ \frac{1}{n+1} & x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right[\,\cup\, \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ mit } n \geq 1 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Skizzieren Sie sich zuerst einen Teil der Funktion, z. B. g eingeschränkt auf die Menge $\left]-2, -\frac{1}{5}\right[\,\cup\, \left]\frac{1}{5}, 2\right[$.

(c) Gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U$, so dass g in jedem Punkt $x \in U$ stetig ist?

Lösung

(a) Siehe alte Version der Aufgabe.

(b) Folgt mit (a) aus der Abschätzung $0 \leq g(x) \leq |x|$ und der Stetigkeit von Betragsfunktion und Nullfunktion im Punkt $x_0 = 0$.

(c) Die Funktion ist offensichtlich (d. h. es ist leicht zu zeigen) an jedem Punkt $x_n := \frac{1}{n}$ unstetig. Dies ist eine Nullfolge, also liegt in jeder offenen Umgebung U von 0 fast jedes Folgenglied, insbesondere unendlich viele Unstetigkeitsstellen der Funktion g.