Analysis 1
14. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
10. Februar 2011

Lösung 51

Wir müssen die Stetigkeit an jeder Stelle $a \in]0,\infty[$ nachweisen. Ist $(x_n)_n$ eine Folge in $]0,\infty[$, die gegen a konvergiert, so liegen fast alle Folgenglieder z.B. in dem Intervall $]a/2,\infty[$. Um die Stetigkeit in a zu zeigen (oder zu widerlegen), genügt es also das Intervall $]a/2,\infty[$ zu betrachten. Insgesamt genügt es deshalb für jedes Intervall $]C,\infty[$ mit $C > 0$ die Stetigkeit nachzuweisen.

Wir zeigen also die Stetigkeit auf jedem der Intervalle $]C,\infty[$ mit $C > 0$. Sei hierzu $a \in]C,\infty[$.

a) Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $]0,\infty[$ mit $\lim_n x_n = a$. Wegen $\lim_n x_n = a > 0$ können wir den bekannten Grenzwertsatz zu Quotieten anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{a} = f(a)\,.$$

b) Für alle $x > C$ gilt

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{xa}\right| = \frac{1}{xa} \cdot |x-a| < \frac{1}{C^2} \cdot |x-a|\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := C^2\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $x \in]0,\infty[$ mit $|x-a| < \delta$

$$\big|f(x) - f(a)\big| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \frac{1}{C^2}|x-a| < \frac{1}{C^2}\delta = \varepsilon$$