Analysis 1
12. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
27. Januar 2010

Lösung 45 Ein Beispiel eines normierten Raums

d) Die Koordinatenauswertungen sind kontraktiv (insbes. stetig), d.h. für jedes $x = (x_m)_m \in \ell^\infty$ gilt $\left|x_m\right| \leq \|x\|_\infty$. Konvergiert nun $(x^{(n)})_n$ gegen g, so ist $\left\|x^{(n)} - g\right\|_\infty$ eine Nullfolge. Somit bilden auch die Koordinaten $\left|x_m^{(n)} - g_m\right| \leq \left\|x^{(n)} - g\right\|_\infty$ eine Nullfolge (in n), d.h. $(x_m^{(n)})_n$ konvergiert gegen g_m.

e) Für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|g_m\right| \leq \left|g_m - x_m^{(n)}\right| + \left|x_m^{(n)}\right| \leq \left\|g - x^{(n)}\right\|_\infty + \left|x_m^{(n)}\right| .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Weil g der Grenzwert der Folge $(x^{(n)})$ in ℓ^∞ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\left\|g - x^{(n)}\right\|_\infty < \varepsilon/2 .$$

Insbesondere gilt $\left\|g - x^{(n_0)}\right\|_\infty < \varepsilon/2$. Weiter ist $x^{(n_0)} = (x_m^{(n_0)})_m$ eine komplexwertige Nullfolge. Es gibt also ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > m_0$ gilt

$$\left|x_m^{(n_0)}\right| < \varepsilon/2 .$$

Somit folgt für alle $m \geq n_0$.

$$\left|g_m\right| \leq \left\|g - x^{(n_0)}\right\|_\infty + \left|x_m^{(n_0)}\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$