

# Analysis 1

## 11. Übung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer  
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik  
20. Januar 2010

### Lösung 41 Polynom vs. Exponent

Setze  $x := |z| - 1 > 0$ . Nach dem Binomischen Satz gilt dann

$$|z^n| = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Für  $n > 2k$  folgt somit

$$|z^n| \geq \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} \geq \frac{n^{k+1} x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}.$$

wegen  $n, n-1, \dots, n-k \geq n/2$ . Für den Quotienten der Aufgabenstellung gilt somit

$$\left| \frac{n^k}{z^n} \right| \leq \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Die Folge auf der rechten Seite der Ungleichung ist eine Nullfolge (in  $n$ ). Somit ist auch  $|n^k/z^n|$  – und damit auch  $n^k/z^n$  – eine Nullfolge.