Analysis 1
10. Übung

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Januar 2011

Lösung 37

a) Sei $\varepsilon > 0$. Die Folge $(a_n)_n$ ist konvergent. Es gibt somit ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left|a_n - a\right| < \varepsilon/2$ für alle $n > n_0$ gilt. Setze

$$M := \max\{\left|a_1 - a\right|, \ldots, \left|a_{n_0} - a\right|\}$$

und wähle ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq 2n_0 M/\varepsilon$. Setze $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt für alle $n > n_2$

$$\begin{aligned}
\left|b_n - a\right| &= \left|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \frac{na}{n}\right| = \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \\
&\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \frac{\left|a_1 - a\right| + \cdots + \left|a_n - a\right|}{n} \\
&= \frac{\left|a_1 - a\right| + \cdots + \left|a_{n_0} - a\right|}{n} + \frac{\left|a_{n_0+1} - a\right| + \cdots + \left|a_n - a\right|}{n} \\
&< \frac{n_0 M}{n} + \frac{(n - n_0)\varepsilon/2}{n} \leq \frac{n_0 M}{2n_0 M \varepsilon} + \frac{n\varepsilon/2}{n} = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

Die Folge $(b_n)_n$ konvergiert also gegen a.

b) Ja, z.B. $a_n := (-1)^n$. Diese Folge ist selbst nicht konvergent (siehe Aufgabe 35). Die Folge $(b_n)_n$ mit

$$b_n = \tfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ist hingegen konvergent.