

Analysis 1

9. Übung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
16. Dezember 2010

Anwesenheitsübungen

Hausübungen

Die Lösungsmenge eines komplexen Gleichungssystems

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \text{und} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Zeigen Sie, dass die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Lösung

Wir verwenden als Lösungsstrategie die Parallelogrammidentität und die Beziehungen:

$$z_1 = -(z_2 + z_3), \quad z_2 = -(z_1 + z_3), \quad z_3 = -(z_1 + z_2).$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} 2 \cdot |z_1|^2 + 2 \cdot |z_2|^2 &= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \\ &= |z_3|^2 + |z_1 - z_2|^2. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ und erhalten

$$|z_1 - z_2|^2 = 3.$$

Führen wir dies mit den Darstellungen von z_2 und z_3 analog durch, so erhalten wir abschließend:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2 = 3.$$

Damit bilden diese Punkte die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks.