Analysis 1
8. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
09. Dezember 2010

Lösung 27

a) Nach oben beschränkt: Nach dem Archimedischen Axiom für $\mathbb{R}_1$ gibt es eine natürliche Zahl $M \in \mathbb{N}$ mit $x <_1 M$. Insbesondere gilt $p \leq_1 x <_1 M$ für alle $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \leq_1 x$, also auch $p \leq_2 M$ in $\mathbb{R}_2$.

b) Die Ungleichung $\varphi(x) \leq \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p <_1 x\}$ gilt nach Konstruktion von $\varphi(x)$. Für die andere Ungleichung nutzen wir Aufgabe 3 der Anwesenheitsübung um

$$\sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\} \leq \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p <_1 x\}$$

zu zeigen. Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \leq_1 x$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_2$ mit $\varepsilon >_2 0$. Dann gibt es eine rationale Zahl $\bar{p}$ mit

$$p - \varepsilon <_2 \bar{p} <_2 p \,.$$

Insbesondere gilt also $\bar{p} <_1 p \leq x$ und $p - \varepsilon <_2 \bar{p}$.

c) Seien $x, y \in \mathbb{R}_1$ mit $x <_1 y$. Dann gibt es eine rationale Zahl $\bar{p} \in \mathbb{Q}$ mit $x <_1 \bar{p} <_1 y$.

Bemerkung: An dieser Stelle ist $\bar{p}$ in $\mathbb{R}_2$ eine obere Schranke für die Menge $\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\}$, und es folgt

$$\varphi(x) = \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\} \leq \bar{p} \leq \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 y\} = \varphi(y)\,.$$

Durch einen weiteren Schritt können wir an dieser Stelle allerdings gleich die *strenge* Monotonie zeigen:

Es gilt also $x <_1 \bar{p} <_1 y$. Weiter gibt es dann eine rationalen Zahl $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\bar{p} <_1 \bar{q} <_1 y$. Somit folgt

$$\varphi(x) = \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\} \leq \bar{p} < \bar{q} \leq \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 y\} = \varphi(y)\,.$$

d) Wir zeigen die beiden Ungleichungen $\varphi(x) \leq y$ und $\varphi(x) \geq y$.

Zuerst $\varphi(x) \leq_2 y$, d.h. wir müssen zeigen, dass y in $\mathbb{R}_2$ eine obere Schranke der Menge $\{p \in \mathbb{Q} \mid p <_1 x\}$ ist. Sei also $p \in \mathbb{Q}$ mit $p <_1 x$. Nach Konstruktion von x gibt es dann $\bar{p} \in \mathbb{Q}$ mit $\bar{p} \leq_2 y$ und $p <_1 \bar{p} \leq x$. Es folgt $p <_2 \bar{p} \leq_2 y$.

Als nächstes zeigen wir $y \leq_2 \varphi(x)$ mit Widerspruch. Dazu nehmen wir an, es gilt $\varphi(x) <_2 y$. Dann gibt es eine Zahl $\bar{p} \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi(x) <_2 \bar{p} <_2 y$. Nach Konstruktion von x gilt dann $\bar{p} \leq_1 x$. Nach Konstruktion von φ folgt dann der Widerspruch

$$\varphi(x) <_2 \bar{p} \leq \sup_{\mathbb{R}_2}\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq_1 x\} = \varphi(x)\,.$$