7. Übung
Lösungshinweis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
2. Dezember 2010

Hausübungen

Aufgabe 25 Monotone Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, falls für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt:

$$f(a) \leq f(b).$$

(a) Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung, so ist für jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ auch die Bildmenge $f(A)$ nach oben beschränkt und es gilt:

$$\sup(f(A)) \leq f(\sup(A)).$$

(b) Zeigen Sie, dass in (a) sogar Gleichheit gilt, wenn A ein maximales Element besitzt.

(c) Finden Sie eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\sup(f(A)) < f(\sup(A)).$$

Lösung

(a) Für jedes $a \in A$ gilt $a \leq \sup(A)$. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, gilt also auch $f(a) \leq f(\sup(A))$ für jedes $a \in A$. Also ist $f(\sup(A))$ eine obere Schranke für $f(A)$, insbesondere ist $f(A)$ nach oben beschränkt und besitzt, da $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist, ein Supremum. Es folgt also

$$\sup(f(A)) \leq f(\sup(A)),$$

da $f(\sup(A))$ eine obere Schranke war.

(b) Besitzt A ein maximales Element, so ist dies auch das Maximum der Menge A. Ist $m = \max(A)$, so ist $m = \sup(A)$ und $f(m) \in f(A)$ ist das Maximum von $f(A)$: Ist $y \in f(A)$ beliebig, so gilt $y = f(x)$ für ein $x \in A$. Da m in A das Maximum war, folgt $x \leq m$ und damit $y = f(x) \leq f(m)$ auf Grund der Monotonie von f. Damit erhalten wir insbesodere

$$f(\sup(A)) = f(m) = \sup(f(A)),$$

da das Maximum einer Menge auch deren Supremum ist.

(c) Wir wählen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Funktion monoton wachsend ist: Ist $x \leq y < 0$ oder $0 \leq x \leq y$, so ist $f(x) = f(y)$, also gilt auch $f(x) \leq f(y)$. Ist $x < 0 \leq y$, so ist $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. In diesem Fall gilt also inbesondere $f(x) \leq f(y)$. Da diese drei Fälle alle Möglichkeiten für eine beliebige Wahl von $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ abdecken, folgt die Monotonie der Funktion f.

Weiter wählen wir $A = [-1, 0[$. Nun gilt:

$$\sup(A) = 0 \text{ und } f(A) = \{0\}.$$

Wir erhalten mit $f(\sup(A)) = f(0) = 1$:

$$\sup(f(A)) = 0 < 1 = f(\sup(A)).$$