Analysis 1
6. Übung

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
25. November 2010

Lösung 23

Beweis: Ersetze in 3.5 + sinngemäß durch ·

Für $a, c \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}$, $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}[(a,b)] =_{\mathbb{Q}} [(c,d)] &\iff (a,b) \sim_{\mathbb{Q}} (c,d) \\ &\iff a \cdot d = c \cdot b \text{ in } \mathbb{Z} \\ &\iff a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \text{ in } \mathbb{K}.\end{aligned}$$

Also ist

$$i : \mathbb{Q} \ni [(a,b)] \mapsto a \cdot b^{-1} \in \mathbb{K}$$

wohldefiniert und injektiv

Es ist

$$\begin{aligned} i\left([(a,b)] + [(c,d)]\right) &\underset{\text{neue Schreibw.}}{=} i\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \\ &\overset{2.13}{\underset{2.14}{=}} i\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) \\ &\underset{\text{Def. von } i}{=} (ad + bc) \cdot (bd)^{-1} \\ &\underset{\text{Distrib.}}{=} ad\,(bd)^{-1} + bc\,(bd)^{-1} \\ &\underset{\text{Rechnen in } \mathbb{K}}{=} a\,b^{-1} + c \cdot d^{-1} \\ &\underset{\text{Def. von } i}{=} i\left(\frac{a}{b}\right) + i\left(\frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} i\left([(a,b)] \cdot [(c,d)]\right) &\underset{2.13}{=} i\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \\ &\underset{2.14}{=} i\left(\frac{ac}{bd}\right) \\ &\underset{\text{Def. von } i}{=} ac \cdot (bd)^{-1} \\ &\underset{\text{Rechnen in } \mathbb{K}}{=} a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} \\ &\overset{\text{Gruppe}}{\underset{\text{Rechnen in } \mathbb{K}}{=}} (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) \\ &\underset{\text{Def. von } i}{=} i\left(\frac{a}{b}\right) \cdot i\left(\frac{c}{d}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$