Analysis 1
5. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
18. November 2010

Hausübungen

Aufgabe 19 Fareys Brüche Schema

Wir wollen alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ in ein Zahlenschema schreiben. Die ersten drei Zeilen unseres Schemas werden dabei wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{llllll} \mathbb{Q}_1: & \frac{0}{1} & & & & \frac{1}{1} \\ \\ \mathbb{Q}_2: & \frac{0}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} \\ \\ \mathbb{Q}_3: & \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{1}. \end{array}$$

Wir starten unser Schema also mit der Menge $\mathbb{Q}_1 := \{0, 1\}$. Um der Konstruktionsvorschrift willen, schreiben wir die Elemente dieser Menge „künstlich“ als einen Bruch:

$$\mathbb{Q}_1 := \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Nun wollen wir für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge $\mathbb{Q}_k$ rekursiv konstruieren. Dazu folgende Notation: Wir nennen zwei Elemente $x, z \in \mathbb{Q}_k$ mit $x < z$ *benachbart*, falls es kein Element $y \in \mathbb{Q}_k$ gibt, mit $x < y < z$.
Um nun $\mathbb{Q}_{k+1}$ aus $\mathbb{Q}_k$ zu konstruieren, gehen wir wie folgt vor:

- Setze $x \in \mathbb{Q}_{k+1}$, falls $x \in \mathbb{Q}_k$ gilt.
- Sind $\frac{p}{m}$ und $\frac{q}{n}$ benachbart in $\mathbb{Q}_k$, so bilde $x = \frac{p+q}{m+n}$. Falls $m + n \leq k + 1$ gilt, setze $x \in \mathbb{Q}_{k+1}$. Ist $m + n > k + 1$, so ignoriere x. Hierbei darf $x = \frac{p+q}{m+n}$ weder gekürzt noch erweitert werden.

Auf diese Weise entsteht eine Kette von Teilmengen $\mathbb{Q}_k \subseteq \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{Q}_2 \subseteq \mathbb{Q}_3 \subseteq \ldots$$

Dies ist *John Fareys Schema* rationaler Zahlen zwischen 0 und 1.

(a) Setzen Sie das Schema bis $\mathbb{Q}_5$ fort.

(b) Zeigen Sie: Für alle rationalen Zahlen $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$ und $d > 0$ gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion nach $k \in \mathbb{N}$: Sind $\frac{p}{m}, \frac{q}{n} \in \mathbb{Q}_k$ benachbart, so gilt $qm - pn = 1$.
Betrachten Sie hierbei im Induktionsschritt benachbarte Zahlen aus $\mathbb{Q}_k$ und diskutieren Sie die Fälle, dass diese Zahlen entweder benachbart in $\mathbb{Q}_{k+1}$ bleiben oder nicht mehr benachbart in $\mathbb{Q}_{k+1}$ sind.

(d) Zeigen Sie: Ist $\frac{p}{m} \in \mathbb{Q}_k$, so ist $\frac{p}{m}$ bereits vollständig gekürzt.

Hinweise: Für Aufgabenteil (b) kann es sinnvoll sein, die Ausgangsbrüche $\frac{a}{b}$ $\left(\text{bzw. } \frac{c}{d}\right)$ zu erweitern. Die Aussage in Aufgabenteil (d) können Sie aus der Aussage in Aufgabenteil (c) folgern.

(e) Zeigen Sie: Sind $\frac{p}{m} < \frac{q}{n}$ benachbart in $\mathbb{Q}_k$, so folgt aus $\frac{p}{m} < \frac{r}{s} < \frac{q}{n}$ bereits $s \geq m + n$.

(f) Folgern Sie nun: Ist $0 \leq x \leq 1$ mit $x \in \mathbb{Q}$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathbb{Q}_k$. Machen Sie sich klar, dass das bedeutet:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_k = [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Hinweise: Für Aufgabenteil (e) kann es sinnvoll sein, die rationale Zahl $\frac{q}{n} - \frac{p}{m}$ einerseits zu berechnen, andererseits von folgender Identität gebrauch zu machen:

$$\frac{q}{n} - \frac{p}{m} = \left(\frac{q}{n} - \frac{r}{s}\right) + \left(\frac{r}{s} - \frac{p}{m}\right)$$

und anschließend die rechte Seite abzuschätzen.
In Aufgabenteil (f) empfehlen wir, per Induktion zu beweisen, dass jeder gekürzte Bruch der Form $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ für $a > 0$ und $b > 0$ bereits in $\mathbb{Q}_b$ liegt.

Lösung

(a) Die ersten 5 Zeilen des Schemas sehen wie folgt aus:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\mathbb{Q}_1: & \frac{0}{1} & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\[2ex]
\mathbb{Q}_2: & \frac{0}{1} & & & & & \frac{1}{2} & & & & & \frac{1}{1} \\[2ex]
\mathbb{Q}_3: & \frac{0}{1} & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & & & \frac{1}{1} \\[2ex]
\mathbb{Q}_4: & \frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1} \\[2ex]
\mathbb{Q}_5: & \frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1}.
\end{array}
$$

(b) Da wir gefordert haben $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt genau dann $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, wenn $ad < bc$ gilt. Damit sehen wir

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{ad+cd}{bd+d^2} < \frac{bc+cd}{bd+d^2} = \frac{(b+d)c}{(b+d)d} = \frac{c}{d}$$

und wir sehen

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{ab+bc}{b^2+bd} > \frac{ab+ad}{b^2+bd} = \frac{(b+d)a}{(b+d)b} = \frac{a}{b}.$$

Damit folgt die behauptete Ungleichungskette.

(c) **Induktionsanfang:** Für $k = 1$ ist die Aussage wahr, da es nur ein paar benachbarter Elemente gibt, nämlich $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$. Hier gilt die behauptete Gleichung: $1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$.
Induktionsschritt: Sei die Aussage für ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wahr. Wir betrachten ein Paar benachbarter Zahlen $\frac{p}{m} < \frac{q}{n}$ in $\mathbb{Q}_k$. Es gibt nun zwei Fälle: Diese Zahlen bleiben in $\mathbb{Q}_{k+1}$ benachbart, hier ist nichts zu zeigen.
Ist dieses Paar in $\mathbb{Q}_{k+1}$ nicht mehr benachbart, so sind die Zahlen $\frac{p}{m} < \frac{p+q}{m+n}$ benachbart und $\frac{p+q}{m+n} < \frac{q}{n}$ benachbart. Wir müssen also zeigen, daß auch für diese Zahlen die Gleichung gilt. Dies Rechnen wir nach:

$$
\begin{aligned}
(p+q) \cdot m - p \cdot (m+n) &= p \cdot m + q \cdot m - p \cdot m - p \cdot n \\
&= q \cdot m - p \cdot n \\
&= 1, \\
q \cdot (m+n) - (p+q) \cdot n &= q \cdot m + q \cdot n - p \cdot n - q \cdot n \\
&= q \cdot m - p \cdot n \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist jeweils das dritte und letzte Gleichheitsszeichen durch die Induktionsvorraussetzung gerechtfertigt.
Da unsere Argumentation alle Möglichkeiten benachbarter Zahlen in $\mathbb{Q}_{k+1}$ abdeckt, folgt die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}$.

(d) Aus der Gleichung $q \cdot m - p \cdot n = 1$ folgt bereits, daß die Zahlen p und m teilerfremd sind: Betrachten wir den größten gemeinsamen Teiler $g = \mathrm{ggT}(p, q)$ der Zahlen p und q, so gilt g teilt p und g teilt q. Damit teilt g auch die Differenz

$$m \cdot q - n \cdot p.$$

Damit teilt g die Zahl 1 und wir erhalten daraus $g = 1$, da $1 \in \mathbb{Z}$ nur von ± 1 geteilt wird.

(e) Wir erhalten zum einen

$$\begin{aligned} \frac{q}{n} - \frac{p}{m} &= \frac{q \cdot m - p \cdot n}{m \cdot n} \\ &= \frac{1}{m \cdot n}. \end{aligned}$$

Zum anderen erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{n} - \frac{r}{s}\right) + \left(\frac{r}{s} - \frac{p}{m}\right) &= \frac{q \cdot s - r \cdot n}{n \cdot s} + \frac{r \cdot m - s \cdot p}{m \cdot s} \\ &\geq \frac{1}{n \cdot s} + \frac{1}{m \cdot s} \\ &= \frac{m+n}{m \cdot n \cdot s}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\frac{1}{m \cdot n} \geq \frac{m+n}{m \cdot n \cdot s}.$$

Dies bedeutet $\frac{m+n}{s} \leq 1$, also $m + n \leq s$.

(f) Wir zeigen via Induktion: Ist $\frac{a}{b} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ gekürzt, so folgt $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_b$.
Induktionsanfang: Für $b = 1$ ist die Behauptung war, da die Zahlen 0 und 1 Elemente von $\mathbb{Q}_1$ sind.
Induktionsschritt: Sei die Behauptung nun für $b - 1$ mit $b > 1$ wahr. Damit kann der Bruch $\frac{a}{b}$ kein Element von $\mathbb{Q}_{b-1}$ sein. Also muß der Bruch $\frac{a}{b}$ echt zwischen benachbarten Zahlen in $\mathbb{Q}_{b_1}$ liegen: Es gibt also $\frac{p}{m} \in \mathbb{Q}_{b-1}$ und $\frac{q}{n} \in \mathbb{Q}_{b-1}$ benachbart mit

$$\frac{p}{m} < \frac{a}{b} < \frac{q}{n}.$$

Weiter ist der Bruch $\frac{p+q}{m+n}$ kein Element von $\mathbb{Q}_{b-1}$, andernfalls wären unsere gewählten Zahlen nicht benachbart gewesen. Damit können wir mit Hilfe von (e) abschätzen:

- $m + n > b - 1$, da $\frac{p+q}{m+n} \notin \mathbb{Q}_{b-1}$.
- $b \geq m + n$, da (e) gilt.

Es folgt also die Ungleichungskette

$$m + n \geq b \geq m + n,$$

also erhalten wir $b = m + n$ und $\frac{a}{b} = \frac{p+q}{m+n} \in \mathbb{Q}_b$.