Analysis 1
4. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
10. November 2010

Lösung 14 Kürzungsregel der Multiplikation

Wir setzen die Kürzungsregel für die Multiplikation natürlicher Zahlen als bekannt voraus. (Mit vollständiger Induktion folgt sie direkt aus der Kürzungsregel der Addition natürlicher Zahlen.)

Wir zeigen zuerst die Kürzungsregel für den Fall $k > 0$. Sei also $0 < k_1 \in \mathbb{N}$ und seien $[(n_1, n_2)], [(m_1, m_2)] \in \mathbb{Z}$ mit

$$[(n_1, n_2)] \cdot [(k_1, 0)] = [(m_1, m_2)] \cdot [(k_1, 0)] \, ,$$

d.h.

$$n_1 \cdot k_1 + m_2 \cdot k_1 = m_1 \cdot k_1 + n_2 \cdot k_1 \, .$$

Aufgrund der Distributivität von Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ ergibt sich

$$(n_1 + m_2) \cdot k_1 = (m_1 + n_2) \cdot k_1 \, .$$

Aus der Kürzungsregel für die Multiplikation natürlicher Zahlen folgt dann $n_1 + m_2 = m_1 + n_2$, d.h. $[(n_1, n_2)] = [(m_1, m_2)]$.

Wir betrachten nun den Fall $k < 0$: Sei also $k < 0$ und seien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \cdot k = m \cdot k$. Multipliziert man (-1) auf beiden Seiten und verwendet Assoziativität der Multiplikation zusammen mit $k \cdot (-1) = (-k)$, so folgt

$$n \cdot (-k) = m \cdot (-k) \, .$$

Wegen $(-k) > 0$ können wir nun die bereits bewiesene Kürzungsregel anwenden, womit $n = m$ folgt.

Betrachten wir nun eine Gleichung der Form $m \cdot x = n$ mit gegebenen Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$. Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ zwei Lösungen dieser Gleichung, so gilt $m \cdot x_1 = n = m \cdot x_2$. Nach der Kürzungsregel (zusammen mit der Kommutativiät der Multiplikation) folgt daraus $x_1 = x_2$.