Aufgabe 1 Endliche geometrische Reihe

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion folgende Identität: Für alle Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \notin \{0, 1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Lösungsvorschlag

Sei $A(n)$ die Aussage $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Behauptungen $A(n)$ wahr ist.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}.$$

Also ist die Aussage $A(0)$ wahr.
Induktionsschritt: Angenommen, $A(n)$ ist wahr. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{(IV)}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1} \cdot (1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Damit gilt also $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit dem Induktionsanfang folgt damit die Behauptung.

Aufgabe 2 Zur Ordnung auf den natürlichen Zahlen

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass **genau** eine der folgenden Aussagen gilt:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Lösungsvorschlag

Hierzu finden Sie im Buch von Koch, „Einführung in die Mathematik,“ Springer Verlag, auf Seite 21 f. einen Beweis. Beachten Sie hierbei, daß in diesem Buch die Zahl 0 nicht als natürliche Zahl angesehen wird, das Element in $\mathbb{N}$, welches nicht Nachfolger einer anderen Zahl ist, ist 1.

Aufgabe 3 Der Rekursionssatz von Dedekind

Sei A eine nicht leere Menge, $a \in A$ ein Element und $f : A \to A$ eine Selbstabbildung. Zeigen Sie folgende Aussage: Unter obigen Vorraussetzungen gibt es genau eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ mit $\varphi(0) = a$ und $\varphi(n') = f(\varphi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hierbei bezeichnet n' den Nachfolger der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag

Hierzu finden Sie im Buch von Ebbinghaus et al., „Zahlen,“ Springer Verlag, auf Seite 15 f. einen Beweis.