Analysis 1
Beispiellösung zur 2. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
28. Oktober 2010

Aufgabe 7 Kleinste Elemente

Zeigen Sie: Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ hat ein Minimum, d.h. es gibt ein Element $a_{\min} \in A$ mit $a_{\min} \leq a$ für alle $a \in A$.
Hinweis: Formulieren Sie vorher exakt, welche Aussage Sie beweisen wollen.

Lösung

Wir zeigen mit vollständiger Induktion die folgende Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: Jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $n \in A$ besitzt ein Minimum. Da jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ ein Element $n \in \mathbb{N}_0$ enthällt, ergibt sich daraus die Behauptung.

Induktionsanfang: Betrachte $n = 0$ und sei $A \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Teilmenge mit $0 \in A$. Weil $0 \leq a$ $(a = 0 + a)$ für jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_0$ gilt, insbesondere für $a \in A$, ist 0 das Minimum von A.

Wir nehmen nun an, dass jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $n \in A$ ein Minimum besitzt (Induktionsannahme). Sei $B \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Teilmenge mit $n + 1 \in B$. Wir setzen $A := B \cup \{n\}$. Wegen $n \in A$ besitzt die Menge A nach Induktionsannahme ein Minimum $a_{\min} \in A$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Gilt $a_{\min} \in B$, so ist $a_{\min}$ auch das Minimum von B, denn für alle $b \in A$, insbes. für $b \in B \subseteq A$, gilt $a_{\min} \leq b$.

b) Gilt $a_{\min} \notin B$, d.h. $a_{\min} = n$, so setzen wir $b_{\min} := n+1$ und zeigen, dass $b_{\min}$ das Minimum von B ist:[1] Nach Voraussetzung gilt $b_{\min} \in B$. Sei $b \in B$. Weil $a_{\min} = n$ das Minimum von A ist, gibt es ein Element $k \in \mathbb{N}_0$ mit $b = n + k$. Wegen $n \notin B$ muss $k \neq 0$ gelten. Nach dem Peano-Axiom (P1) gibt es also eine Zahl $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $k = k_0 + 1$. Nach den gezeigten Regeln für die Addition natürlicher Zahlen folgt

$$b = n + (k_0 + 1) \overset{\text{Komm.}}{=} n + (1 + k_0) \overset{\text{Assoz.}}{=} (n + 1) + k_0 ,$$

d.h. es gilt $n + 1 \leq b$. Also ist $b_{\min} = n + 1$ das Minimum von B.

In beiden Fällen haben wir damit gezeigt, dass die Teilmenge B ein Minimum besitzt (Induktionsschritt).

Somit folgt für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, dass jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $n \in A$ ein Minimum besitzt (Induktionsschluss).

[1] Der Nachweis wird hier sehr detailliert geführt, um den Umgang mit der Relation $\leq$ zu demonstrieren.