Analysis I
1. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
21. Oktober 2010

Hausübungen

Aufgabe 1 Rechenoperationen auf den natürlichen Zahlen

Wir bezeichnen in dieser Aufgabe mit n' den Nachfolger einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$. Leiten Sie aus den Peano-Axiomen ab: Für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ gelten folgende Rechenregeln:

(a) $0 + n = n$.

(b) $m' + n = (m + n)'$.

(c) $m + n = n + m$.

Lösungsvorschlag

Wir zeigen alle Behauptungen via vollständiger Induktion.

(a) Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Sei $A(n)$ die Aussage: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $0 + n = n$.
Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr, da $m + 0 = m$ per Definition für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Insbesondere gilt also $0 + 0 = 0$.
Induktionsschritt: Wir nehmen für ein $n \in \mathbb{N}_0$ an, $A(n)$ ist wahr. Also gilt $0 + n = n$. Dann erhalten wir

$$0 + n' = (0 + n)' = n'.$$

In der ersten Umformung haben wir die Definition der Addition und in der zweiten Umformung die Induktionsannahme verwendet. Also ist auch $A(n')$ wahr.
Induktionsschluß: Da für $n = 0$ die Behauptung $0 + n = n$ gilt und aus $0 + n = n$ folgt, daß $0 + n' = n'$ gilt, so ist $0 + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Sei $A(n)$ die Aussage: Für beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $m' + n = (m + n)'$.
Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr, da $m' + n = m' + 0 = m' = (m + 0)' = (m + n)'$ gilt.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, Aussage $A(n)$ sei wahr. Dann gilt $m' + n = (m + n)'$ für dieses $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir

$$m' + n' = (m' + n)' = ((m + n)')' = (m + n')'.$$

Hierbei haben wir in der ersten Umformung die Definition der Addition, in der zweiten die Induktionsannahme und in der dritten wieder die Definition der Addition verwendet. Also ist auch Aussage $A(n')$ wahr.
Induktionsschluß: Da für $n = 0$ die Behauptung $m' + 0 = (m + 0)'$ gilt und aus $m' + n = (m + n)'$ folgt, daß $m' + n' = (m + n')'$ gilt, so ist $m' + n = (m + n)'$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Sei $A(n)$ die Aussage: Für beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $m + n = n + m$.
Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr, denn ist $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $n = 0$, dann gilt: $m + n = m + 0 = m = 0 + m$. Hierbei haben wir die Definition bzw. (a) verwendet.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, Für $n \in \mathbb{N}$ sei Aussage $A(n)$ wahr. Dann gilt $m + n = n + m$ für $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Damit erhalten wir

$$m + n' = (m + n)' = (n + m)' = n' + m.$$

Dabei haben wir in der ersten Umformung die Definition der Addition, in der zweiten Umformung die Induktionsannahme und in der dritten Umformung unser Resultat (b) verwendet. Also folgt, daß Aussage $A(n')$ wahr ist.
Induktionsschluß: Da für $n = 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig die Behauptung $m + 0 = 0 + m$ stimmt und aus $m + n = n + m$ folgt, daß $m + n' = n' + m$ gilt, so gilt $m + n = n + m$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bei beliebigem $m \in \mathbb{N}_0$.