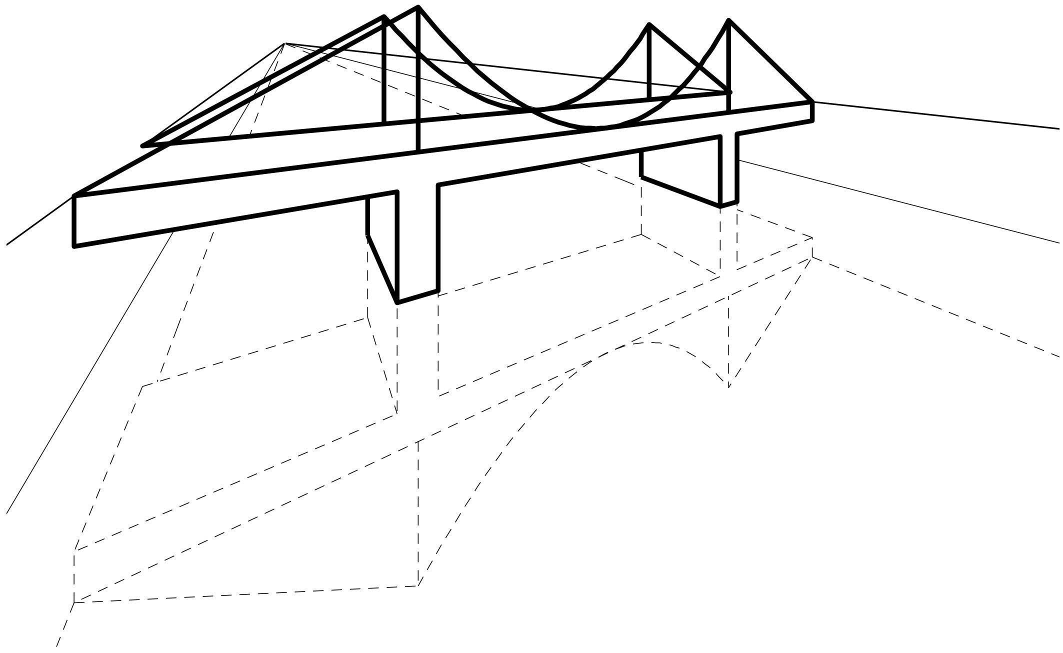
Darstellende Geometrie

für Architekten und Bauingenieure

Skript von Erich Hartmann



Vorlesung von Karsten Große-Brauckmann

Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
WS 10/11

Inhaltsverzeichnis

Lernziele der Vorlesung

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Die Vorlesung will erläutern, nach welchen Regeln diese Darstellungen entstehen.

Im einzelnen soll die Vorlesung erklären, wie die Darstellungen zu lesen sind, d.h. welche Merkmale der Objekte daraus abzulesen sind. Dies bedeutet die folgenden **Fähigkeiten**:

- Von einem 3D–Objekt schnell eine *Skizze anfertigen*,
- vorgefertigte Zeichnungen *lesen*,
- in vorgefertigte Zeichnungen oder Photos *Ergänzungen einfügen*,
- aus vorgefertigten Zeichnungen oder Photos *wahre Längen und Winkel* oder ganze Grund– und Aufrisse bestimmen.

Durch die konkreten Überlegungen soll ganz allgemein die räumliche Vorstellung geschult werden. Daher wird es uns bei speziellen Konstruktionsverfahren wichtig sein, sie aus der dreidimensionalen Geometrie heraus zu begründen.

Ziel der Vorlesung ist **nicht** das akurate Erstellen technischer Zeichnungen per Hand. In der Praxis leisten dies CAD-Systeme auf dem Rechner.

Arbeitsmaterialien

In der Vorlesung werden wesentliche Konstruktionen erarbeitet und im vorliegenden **Skript** eingezeichnet. Die Konstruktionsschritte sind im Skript stichwortartig beschrieben und durch Einrahmung hervorgehoben. In Vorlesung und Übungen benötigen Sie **Bleistift, Geodreieck** und **Lineal**, manchmal auch einen **Zirkel**.

Drucken Sie sich vor der Vorlesung das Skript aus und vervollständigen Sie die Zeichnungen als Ihre Vorlesungsmitschrift. Bringen Sie das Skript auch immer in die Übungen mit und verwenden Sie es dort als Arbeitsgrundlage. In der Klausur zur Vorlesung, die die Bauingenieure und Geodäten schreiben, ist einzig das von Ihnen bearbeitete Skript als Material zugelassen.

Das Skript ist nicht als Lehrbuch zum Selbststudium gedacht. Als **Literatur** für Vorlesung und Praxis werden empfohlen:

a) Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*, Kohlhammer-Verlag, Köln
b) Fucke, Kirch, Nickel:*Darstellende Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig,

Im Skript wird auf Textstellen in diesen Lehrbüchern in der Form "LEO, S. xx" oder "FKN, S. yy" verwiesen.

Als ergänzende und weiterführende Lektüre empfehlen wir die wunderschön illustrierten Bücher:

c) Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*, Elsevier/Spektrum 2005,
d) Pottmann, Asperl, Hofer, Kilian: *Architectural Geometry/Archtekturgeometrie*, Bentley 2007/2010.

Das vorliegende Skript wurde von Erich Hartmann 2002 entworfen und durch Karsten Große-Brauckmann 2009 und 2010 leicht überarbeitet.

Kapitel 1

Projektionen in der Darstellenden Geometrie

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei gibt es zwei konkurrierende Ziele: Will man *Maßgenauigkeit* erreichen, so ist dies meistens nur unter Verlust von *Anschaulichkeit* möglich. Z.B. lassen die beiden folgenden Bilder eines Hauses leicht auf Länge, Breite und Höhe schließen; sie sind aber nicht sehr anschaulich.

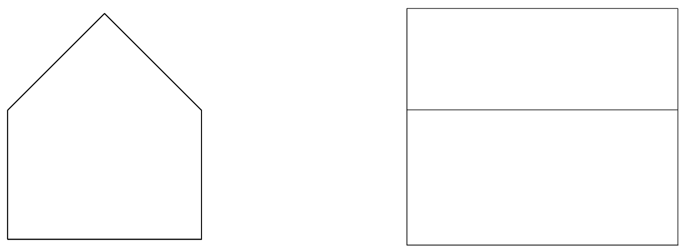


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck mehr zur Geltung. Genaue Abmessungen lassen sich aber (insbesondere aus dem rechten Bild) nur schwer ablesen.

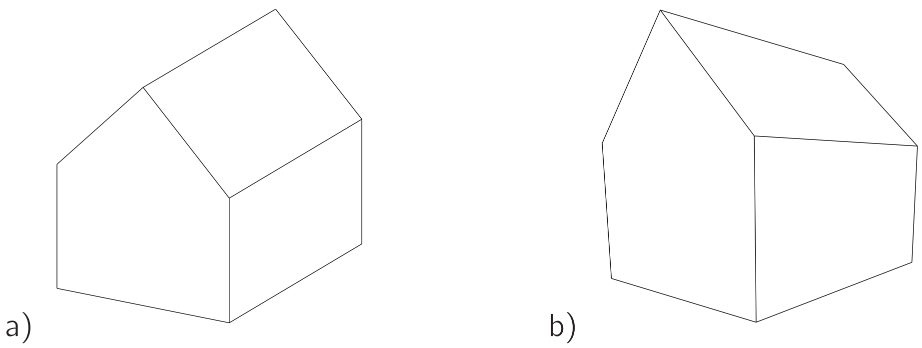


Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

1.1 Abbildungsverfahren

Es gibt viele Möglichkeiten, den dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Ebene (Bildtafel) abzubilden. In der Darstellenden Geometrie bedient man sich zwei spezieller Abbildungsverfahren. Beide **projizieren** das Objekt **längs Geraden in die Ebene**. Man kann sich dazu konkret vorstellen, dass die Geraden Lichtstrahlen sind, welche die Punkte und Kurven eines Objektes im Raum auf einen *Schatten* in der Bildebene abbilden.

1.1.1 Parallelprojektion

Alle Abbildungsstrahlen sind **parallel**. Man unterscheidet zwei Fälle:

a) Die Strahlen stehen **senkrecht** zur Bildtafel (*senkrechte Parallelprojektion*).

b) Die Strahlen stehen **nicht senkrecht** zur Bildtafel (*schiefe Parallelprojektion*).

Die senkrechte Parallelprojektion ist meist anschaulicher, schiefe Parallelprojektionen sind aber oft einfacher zu erzeugen.

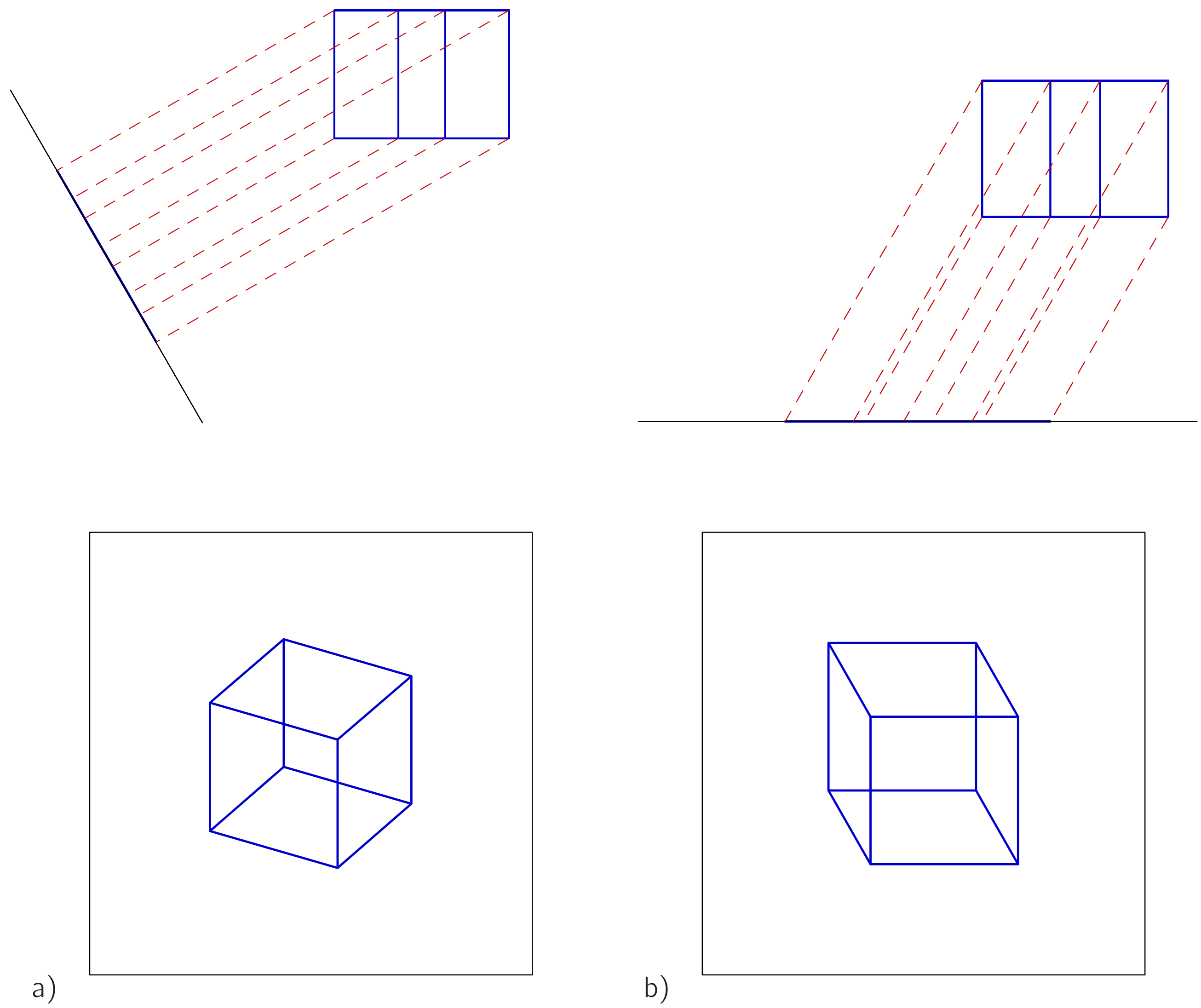


Abbildung 1.3: Quader in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

Die Parallelprojektion lässt sich als Schattenwurf eines Objektes durch eine weit entfernten Punktlichtquelle deuten. Von der Entfernung her ist Sonnenlicht ein gutes Beispiel dafür, wegen der Größe der Sonnenscheibe ist das Bild allerdings unscharf. (Warum sehen Sie auf dem Waldboden kleine kreisförmige Schatten?).
Wir werden uns in Kapitel 2 bis 4 mit der Parallelprojektion befassen.

1.1.2 Zentralprojektion

Alle Abbildungsstrahlen gehen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt. Dieses Abbildungsverfahren entspricht dem Schattenwurf durch eine nahe Punktlichtquelle. Es ist auch das Abbildungsverfahren, das der Fotografie oder dem Sehen mit einem Auge entspricht; daher wirkt es natürlicher als die Parallelprojektion.

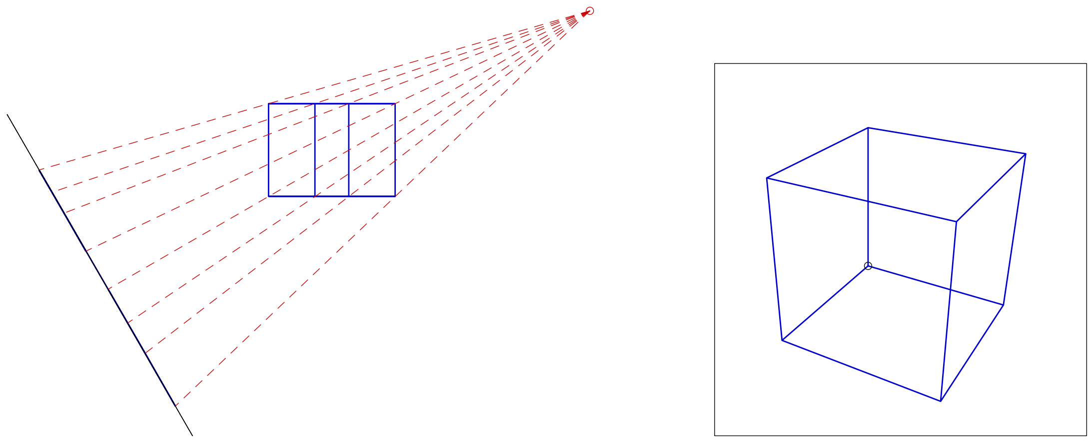


Abbildung 1.4: Quader in Zentralprojektion

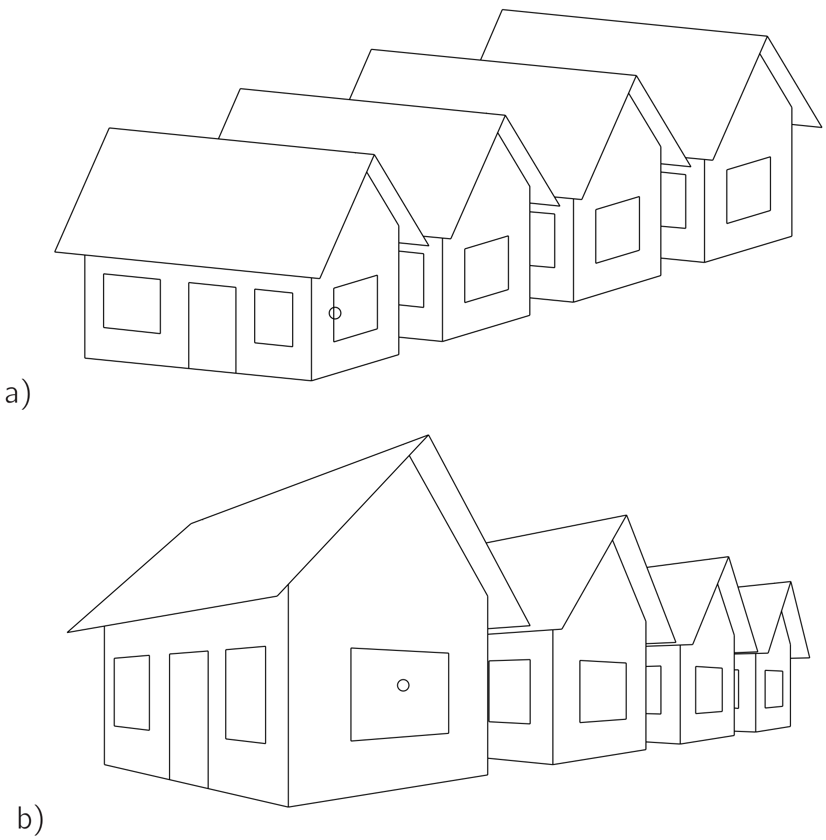


Abbildung 1.5: Häuser in a) Parallelprojektion b) Zentralprojektion

In Kapitel 5 werden wir sehen, wie man Zentralprojektionen aus zwei Parallelprojektionen (typischerweise Grund- und Aufriss) herstellen kann, und wie man umgekehrt aus Zentralprojektionen Maße ablesen kann.

1.2 Bezeichnungen und Symbole

Bevor wir die Eigenschaften der Projektionen diskutieren, möchten wir noch Bezeichnungen und Symbole einführen, so wie wir sie in der ganzen Vorlesung benutzen werden.

Punkte: Große lateinische Buchstaben $P, A, B, C, \ldots,$
Geraden, Kurven: kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots,$
Ebenen: kleine griechische Buchstaben $\varepsilon, \pi, \ldots,$
Winkel: kleine griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \delta, \varphi, \ldots.$

PQ: *Gerade* durch die Punkte P, Q, $\overline{PQ}$: *Strecke* mit den Endpunkten P, Q,
$|PQ|$: *Länge* der Strecke PQ.

$g \parallel h$: Gerade g *parallel* zu Gerade h, $\nparallel$: nicht parallel,
$g \perp h$: Gerade g ist *senkrecht* (orthogonal) zu Gerade h.

Wir fassen Geraden, Kurven, Ebenen, Flächen, ... als Punkt*mengen* auf und benutzen die für Mengen üblichen mathematischen Symbole:
$P \in \varepsilon$: Punkt P liegt in der Ebene ε (ist *Element* von), $P \notin \varepsilon$: Punkt P liegt nicht in der Ebene ε,
$g \subset \varepsilon$: Gerade g ist in der Ebene ε *enthalten*,
$g \cap \varepsilon$: *Schnitt* der Geraden g mit der Ebene ε, $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$: *Schnitt* zweier Ebenen.

Zwei sich **nicht** schneidende Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, heißen *windschief*.

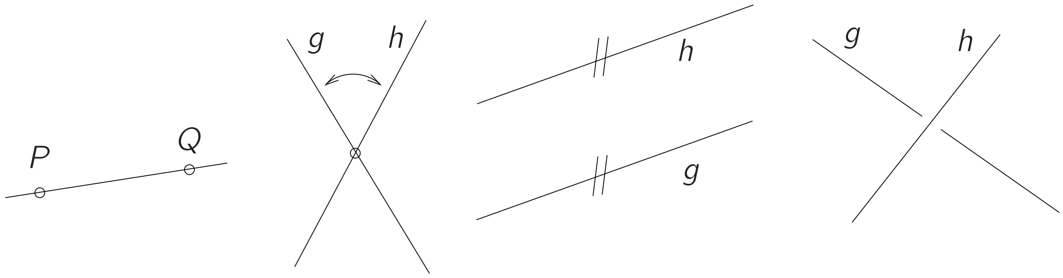


Abbildung 1.6: Gerade sowie schneidende, parallele, windschiefe Geraden

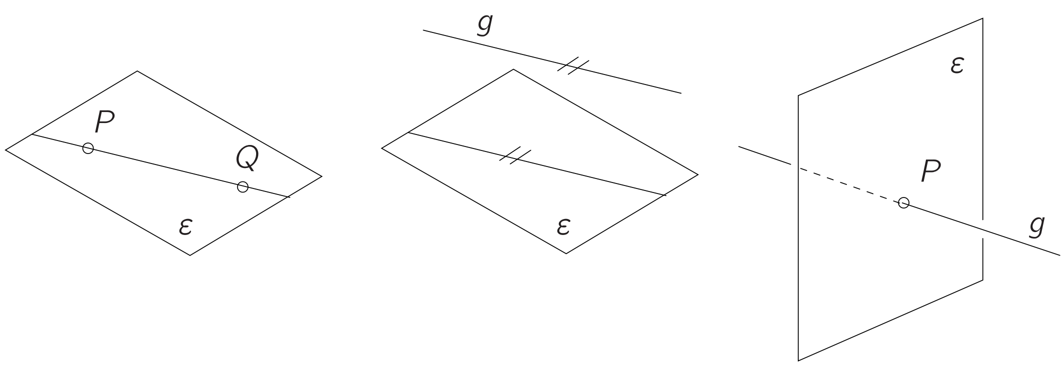


Abbildung 1.7: Gerade enthalten in, parallel und senkrecht zu einer Ebene

Vereinbarung:
Verdeckte (*unsichtbare*) Kanten oder Kurven werden gestrichelt, abgesetzt oder weggelassen.

1.3 Eigenschaften der Projektionen

Eine *Projektion* bildet jeden Punkt P des Raumes auf einen Punkt P' der Bildebene ab. Sowohl Parallel– wie Zentralprojektion projizieren längs Geraden und haben folgende Eigenschaft:

(G) *Geradentreu*, das Bild einer Gerade g ist wiederum eine Gerade g'. Ausnahme: Fällt g mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird g' zu einem Punkt; in diesem Fall heißt g *projizierend*.

Wir kommen nun zu spezifischen Eigenschaften.

1.3.1 Parallelprojektion

(P1) Die Bilder paralleler Geraden sind im Allgemeinen wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)

(P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt (*Teilverhältnistreue*).

(P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

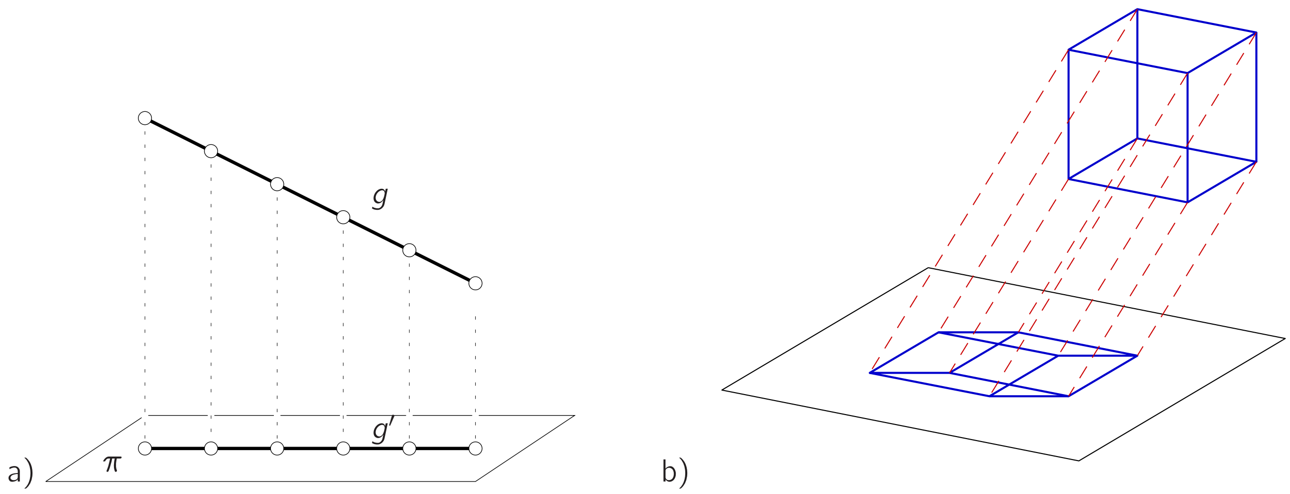


Abbildung 1.8: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) Bei dieser schiefen Parallelprojektion bleiben Deckel und Boden des Quaders unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind (s. auch Abb. 1.3).

1.3.2 Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion nicht, wie z.B. Abbildung 1.2 belegt. Aber es gilt:

(Z1) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.A. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des zugehörigen Parallelbüschels (Menge der zu einer festen Gerade parallelen Geraden). Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

(Z2) Alle Geraden einer Ebene durch das Zentrum Z (*projizierende Ebene*) werden in eine Gerade oder einen Punkt (wann?) abgebildet.

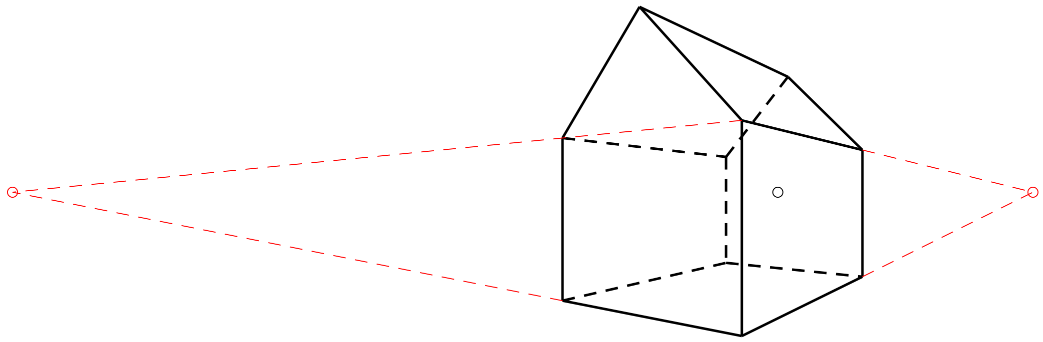


Abbildung 1.9: Fluchtpunkte bei Zentralprojektion eines Hauses

Abbildung 1.10: Festsaal in Zentralprojektion – wo liegt der Fluchtpunkt?

1.4 Grundriss, Aufriss, Risskante, Ordner

Im nächsten Kapitel benötigen wir die Begriffe *Grundriss* und *Aufriss*; wir werden sie im Kapitel Zweitafelprojektion noch näher studieren. Es seien π_1, π_2 zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen und P ein Punkt. Die Ebene π_1 sei horizontal und heißt *Grundrissebene* (oder *–tafel*), die vertikale Ebene π_2 *Aufrissebene* (oder *–tafel*). Die Schnittgerade $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$ nennt man *Risskante*. Projiziert man P **senkrecht** auf die Ebene π_1 bzw. π_2, so erhält man den *Grundriss* P' bzw. den *Aufriss* P'' von P. Hat man noch eine weitere senkrechte Ebene π_3, so nennt man die Projektion P''' von P auf π_3 einen *Seitenriss*.

Um Operationen oder Konstruktionen, bei denen P eine Rolle spielt, in **einer** Zeichenebene darstellen zu können, klappt man die Aufrisstafel π_2 um die Risskante k_{12} in die Grundrisstafel π_1. **Nach** dieser Umklappung liegen P' und P'' auf einer Senkrechten zur Risskante. Diese Senkrechte heißt *Ordner* und verbindet P' und P''.

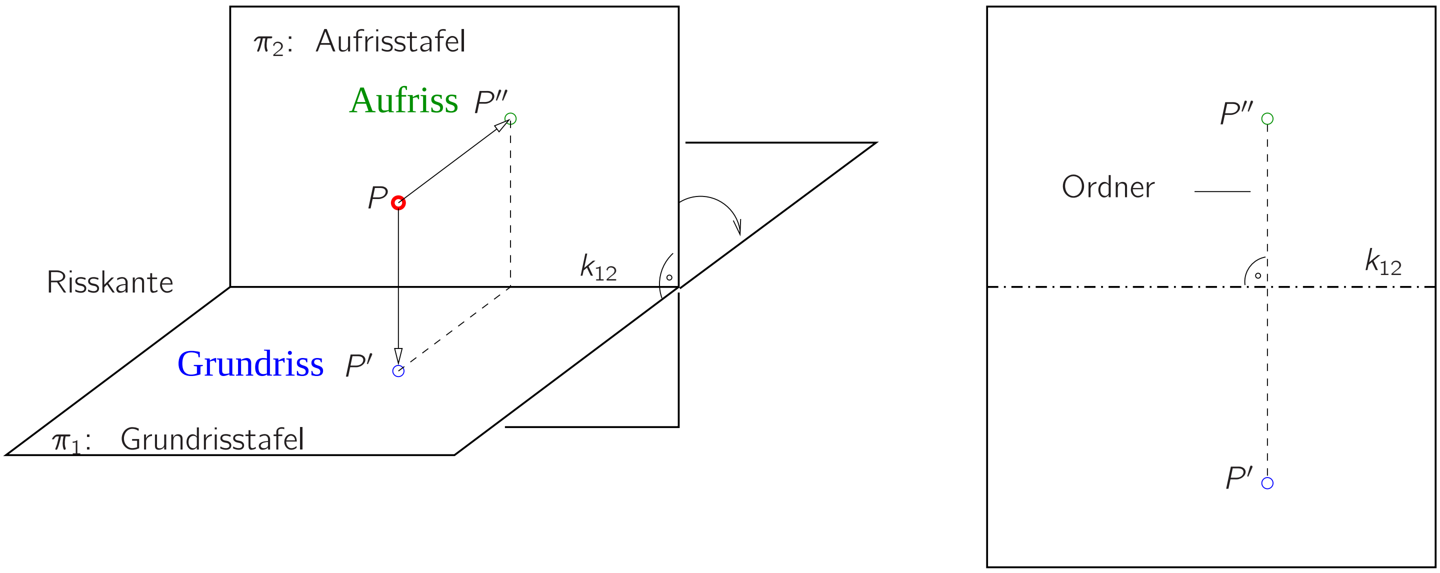


Abbildung 1.11: Grundriss und Aufriss eines Punktes

Merke:
- Grundriss P' und Aufriss P'' eines Punktes liegen auf demselben Ordner!
- Ein Punkt P ist durch seinen Grund– und Aufriss eindeutig bestimmt.

Zur eindeutigen Beschreibung eines Punktes sind also **zwei** senkrechte Parallelprojektionen notwendig. Machen Sie sich das auch anhand der Koordinaten $P = (x, y, z)$ klar.

Im Folgenden sind Grund– und Aufrisse einiger Objekte gegeben, die den gleichen Grundriss besitzen.

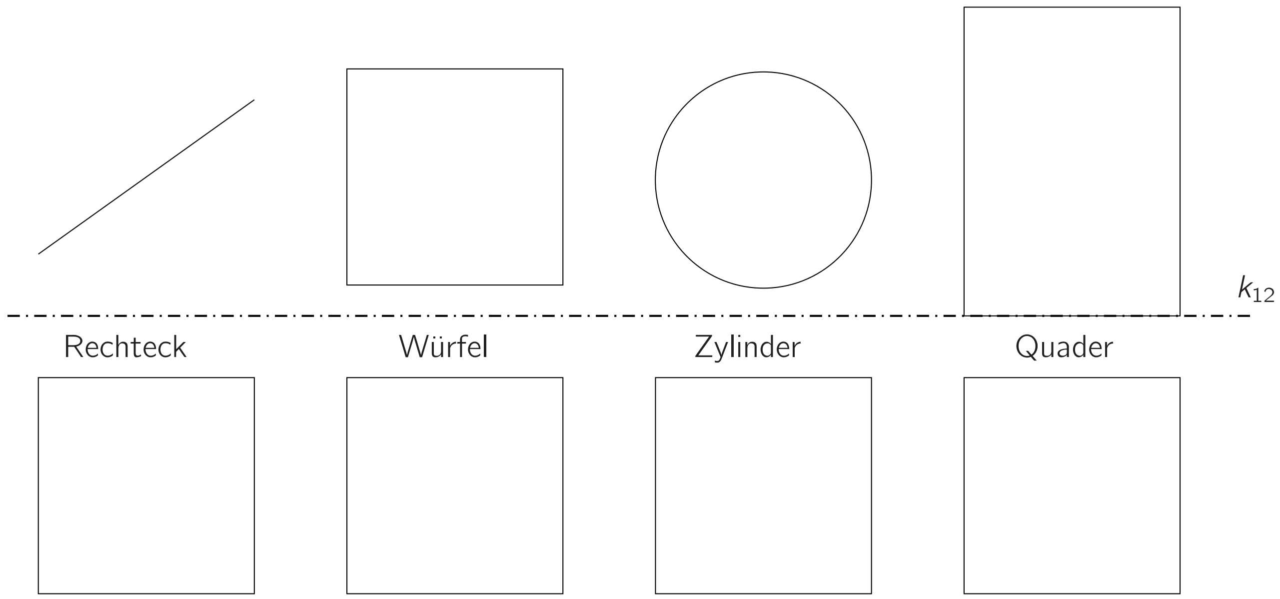


Abbildung 1.12: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

Kapitel 2

Axonometrie

Wir werden zwei Verfahren kennenlernen, die Parallelprojektionen herstellen: das *axonometrische Aufbauverfahren* und das *Einschneideverfahren*. Danach wollen wir uns mit der Darstellung von Schatten befassen.

2.1 Axonometrie und Aufbauverfahren (s. LEO S.67)

Eine Axonometrie ist eine Abbildung des Raumes in die Ebene, die über Koordinaten definiert ist.

Man führt im Raum ein geeignetes Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ ein mit Ursprung O und Achsen x, y, z. Üblicherweise sind dies $O = (0,0,0)$ und die Achsenvektoren $\mathbf{e}_x = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_y = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_z = (0,0,1)$, die **rechtwinklig** sind und ein **Rechtssystem** bilden, d.h. ihre Orientierung entspricht der rechten-Hand-Regel.

In der Ebene π schreibt man nun die Bilder des Ursprungs O und der drei Koordinatenvektoren beliebig vor; wir bezeichnen die Bilder mit $\overline{\mathbf{O}}, \overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$. Das axonometrische Bild eines Punktes $P = (x, y, z)$ wird durch die Vorschrift $\overline{P} := \overline{\mathbf{O}} + x \cdot \overline{\mathbf{e}}_x + y \cdot \overline{\mathbf{e}}_y + z \cdot \overline{\mathbf{e}}_z$ gegeben. Die Längen der Bildvektoren kann man als Maßstäbe der Achsen verstehen oder auch als **Verzerrungsverhältnisse**, $v_x := |\overline{\mathbf{e}}_x|$, $v_y := |\overline{\mathbf{e}}_y|$, $v_z := |\overline{\mathbf{e}}_z|$.

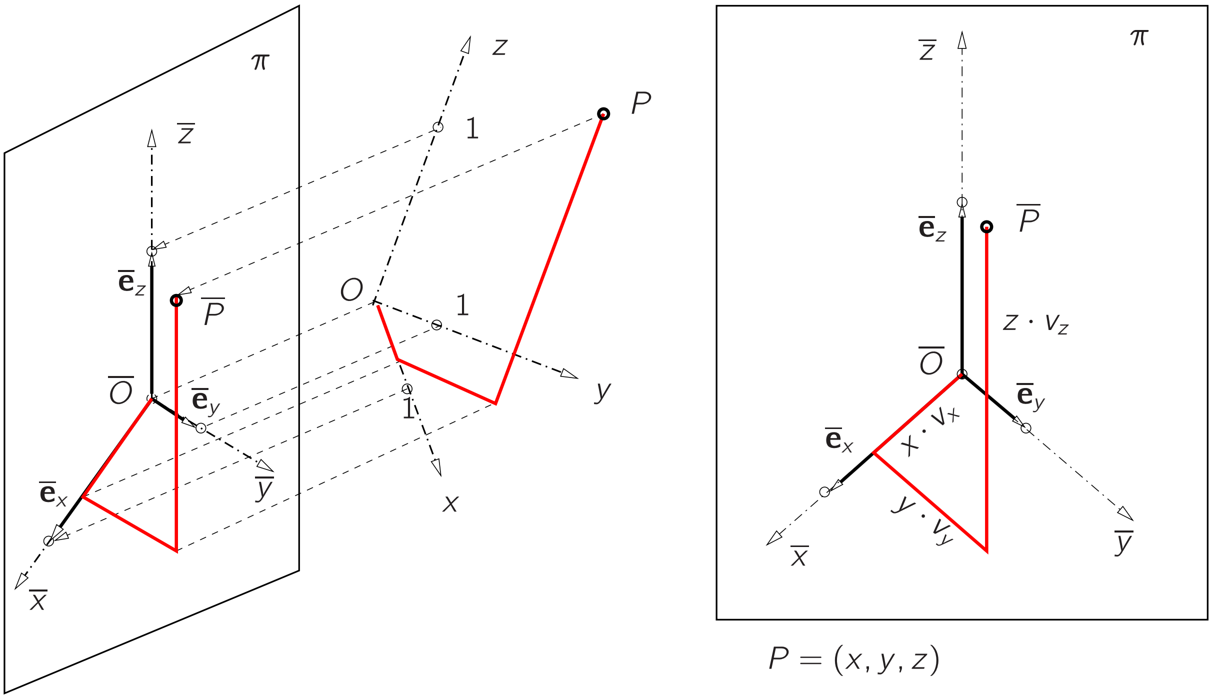


Abbildung 2.1: Axonometrie: Bilder der drei Koordinatenvektoren und eines Punktes P in der Ebene π

Beispielsweise ist der Grundriss eine Axonometrie mit $\overline{\mathbf{O}} = (0,0)$ und $\overline{\mathbf{e}}_x = (1,0), \overline{\mathbf{e}}_y = (0,1), \overline{\mathbf{e}}_z = (0,0)$.

Die geometrische Konstruktion, die der Axonometrie entspricht, nennt man auch **Aufbauverfahren**:

Durchführung : Gegeben $P = (x, y, z)$, gesucht $\overline{P}$.

Gehe (in der Bildtafel von $\overline{O}$ aus)

1. um $x \cdot v_x$ in $\overline{\mathbf{e}}_x$–Richtung und dann
2. um $y \cdot v_y$ in $\overline{\mathbf{e}}_y$–Richtung und dann
3. um $z \cdot v_z$ in $\overline{\mathbf{e}}_z$–Richtung.

(Die Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.)

Beim Zeichnen der Projektionen mehrerer Punkte sollte man vorhandene Parallelitäten (wie z.B. bei einem Quader) ausnutzen. (Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über!)

Aufgabe 2.1 *Stelle axonometrische Bilder eines Hauses her (Abb. 2.2).*

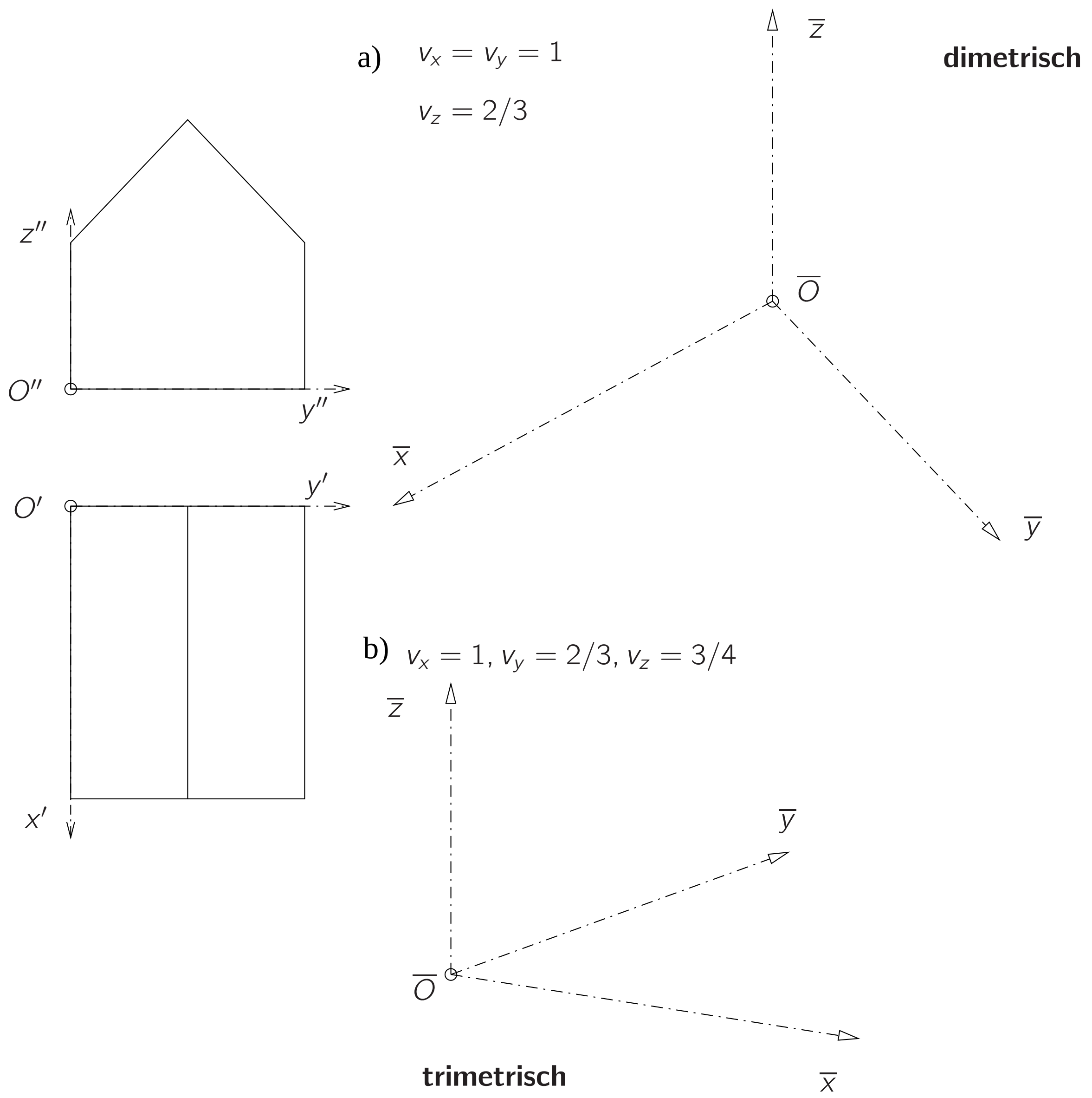


Abbildung 2.2: Axonometrien eines Hauses

Im ersten vorausgegangenen Beispiel stimmen die Maßstäbe in zwei Koordinatenrichtungen überein, im zweiten waren sie alle verschieden. Die Fachbegriffe dazu lauten:

isometrische Axonometrie:	**alle** Verzerrungen sind **gleich**,
dimetrische Axonometrie:	**zwei** Verzerrungen sind **gleich**,
trimetrische Axonometrie:	**alle** Verzerrungen sind **verschieden**

Nur eine gute Wahl der drei Vektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$ führt zu einem anschaulichen Bild eines Gegenstandes, wie die folgende Abbildung am Beispiel des Einheitswürfels demonstriert:

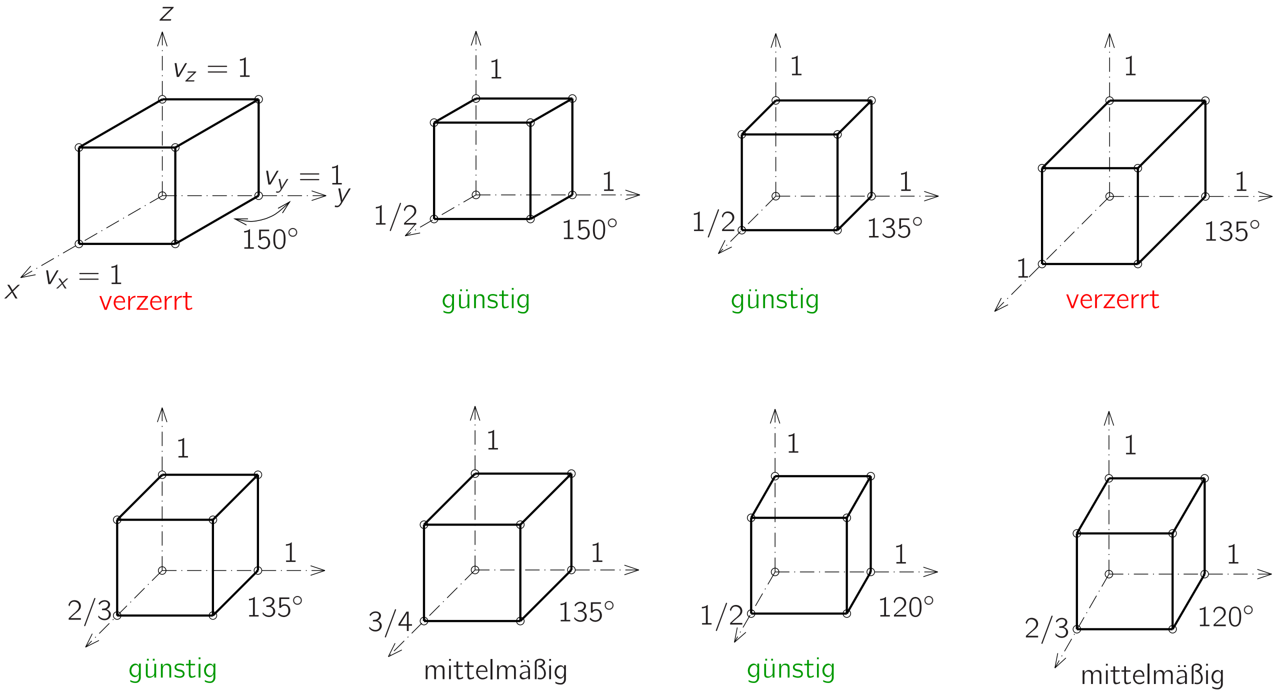


Abbildung 2.3: Verschiedene Axonometrien eines Würfels

Diese Beispiele sind einfach zu erzeugen, denn die beiden Bildvektoren $\overline{\mathbf{e}}_y$, $\overline{\mathbf{e}}_z$ stehen senkrecht aufeinander und haben Verzerrungsverhältnis $v_y = v_z = 1$. Man nennt dies auch eine **Kavaliersperspektive** (der Begriff *Perspektive* ist hier allerdings falsch gewählt). Von Objekten in der y, z-Ebene können die Koordinaten ungeändert übernommen werden; sie haben ein unverzerrtes, kongruentes Bild. Gilt Entsprechendes für x, y anstelle von y, z, so heißt die Axonometrie auch **Vogelperspektive**; die Vogelperspektive ist ein einfaches Mittel, um Stadtpläne zu veranschaulichen. Beispiele finden Sie vielleicht in den Aufgaben.

Auch wenn wir in unserem Rahmen keine Begründung dafür angeben können, sollten Sie folgendes unbedingt wissen. Man kann einfach zeigen, dass jede Parallelprojektion eine Axonometrie ist. (Dies gilt wegen der Linearität der Parallelprojektion, wenn Sie diesen Begriff schon kennen.) Weniger klar ist, dass umgekehrt

jede Axonometrie bis auf einen Vergrößerungs- oder Verkleinerungsfaktor eine Parallelprojektion ist,

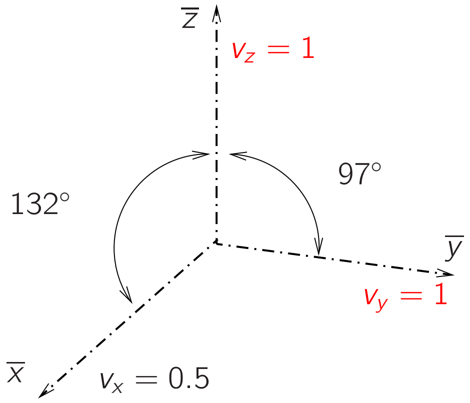
die in der Regel schief ist. Dies ist die Aussage des **Satzes von Pohlke** (1853). Man kann also das axonometrische Bild eines Objektes stets als Schattenwurf auf eine Ebene unter parallelem Licht erzeugen, jedenfalls bis auf einen Faktor. Das heisst, die Axonometrie liefert gerade die mathematische Beschreibung von Parallelprojektionen.

Senkrechte Axonometrien, also Axonometrien, die einer senkrechten Parallelprojektion entsprechen, haben eine deutlich bessere Bildwirkung als schiefe Axonometrien. Es ist nicht offensichtlich, welche Wahlen von Bildvektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$ zu senkrechten Parallelprojektionen gehören. Wir werden dieses Problem in Abschnitt 3.6 behandeln.

2.2 Ingenieur–Axonometrie

Hierbei handelt es sich um folgende spezielle Axonometrie:

1. Die Verzerrungen sind $v_x = 0.5$, $v_y = v_z = 1$ (dimetrische Axonometrie) .
2. In der Projektion ist der
Winkel zwischen der z–Achse und der x–Achse 132°,
Winkel zwischen der z–Achse und der y–Achse 97°.
(siehe Geodreieck !)



Die **Vorteile** der Ingenieur–Axonometrie sind:

- Durch die einfachen Verzerrungsverhältnisse ist sie leicht zu erstellen.
- Das axonometrische Bild ist nahezu eine um den Faktor 1.06 skalierte **senkrechte** Parallelprojektion.
- Die hierzu notwendigen Winkel von 7° und 42° sind auf vielen Geodreiecken markiert.
- Der Umriss einer Kugel ist in guter Näherung ein Kreis.

Aufgabe 2.2 *Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Turm (Abb. 2.4) ein axonometrisches Bild in Ingenieur–Axonometrie.*

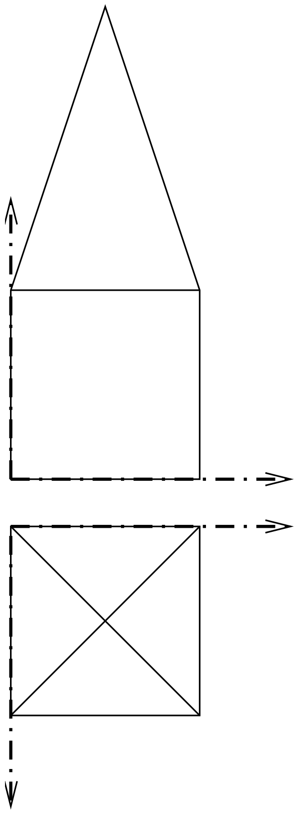


Abbildung 2.4: Aufgabe: Ingenieur–Axonometrie eines Turmes

Bemerkung:
Falls es geeignet erscheint, kann man auch die Winkel und Verzerrungen vertauschen:
a) $v_x = 1$, $v_y = 0.5$,
b) Winkel zwischen z–Achse und x–Achse: 97° und Winkel zwischen z–Achse und y–Achse: 132°.

2.3 Einschneideverfahren

(s. LEO S.75)

Das **Einschneideverfahren** ist ein einfacher geometrischer Weg, um aus Grund- und Aufriss eine Axonometrie oder Parallelprojektion zu erhalten:

Vorgabe:

1. Grund- und Aufriss eines Objektes (allgemeiner: zwei zugeordnete orthogonale Projektionen) sind in vorgegebener Lage in der Zeichenebene π gegeben.
2. Zwei verschiedene *Einschneiderichtungen* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Verfahren:

1. Durch die Risse P', P'' eines Punktes P werden je ein Strahl $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\mathbf{e}_1$–, $\mathbf{e}_2$–Richtung gezogen.
2. $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2 = \overline{P}$ ist das axonometrische Bild von P.

Wir vereinbaren, dass nach demselben Verfahren als erstes die Bilder der drei Einheitsvektoren gezeichnet werden, so dass sich die Sichtbarkeit einfach kontrollieren läßt.

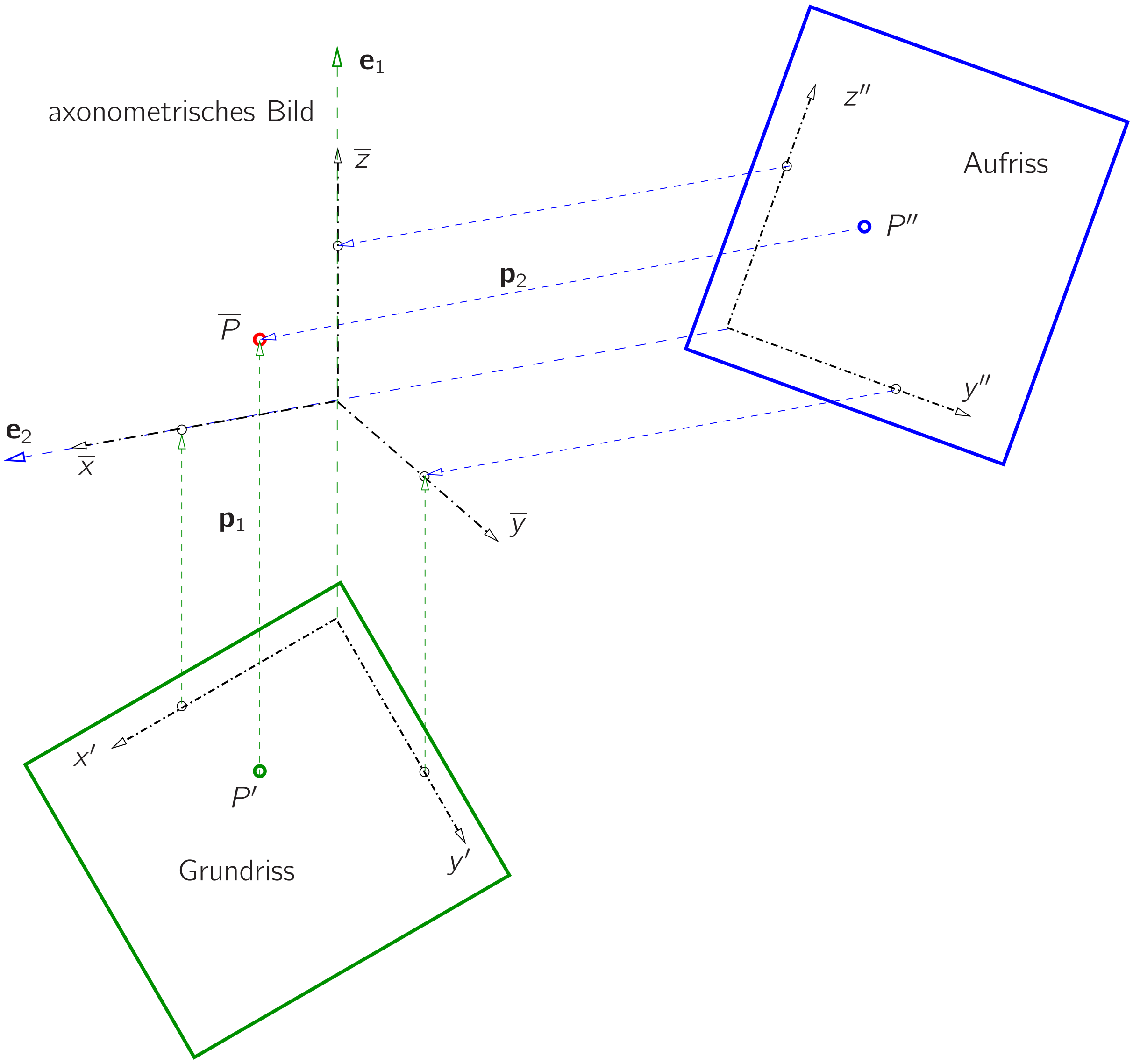


Abbildung 2.5: Einschneideverfahren

Aufgabe 2.3 *Stelle ein axonometrisches Bild eines Hauses mit Hilfe des Einschneideverfahrens her (Abb. 2.6).*

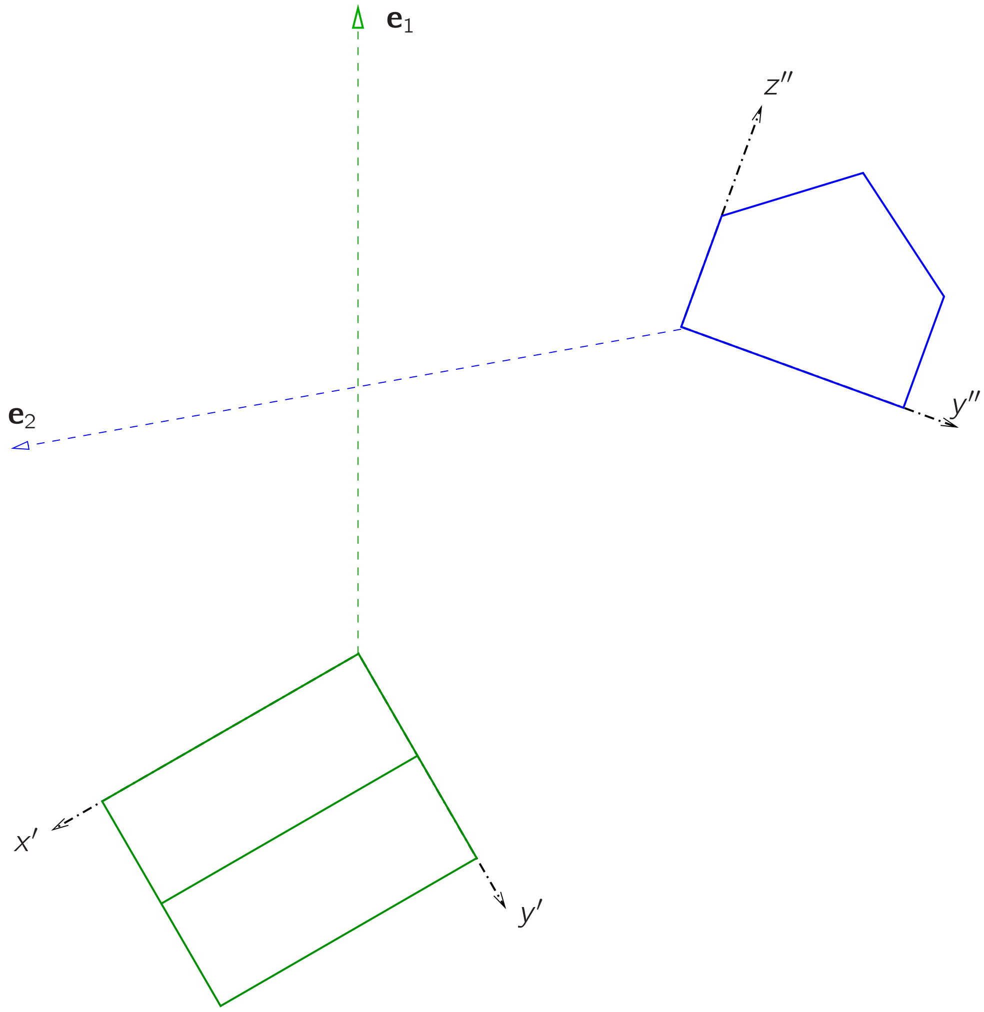


Abbildung 2.6: Einschneideverfahren: Haus

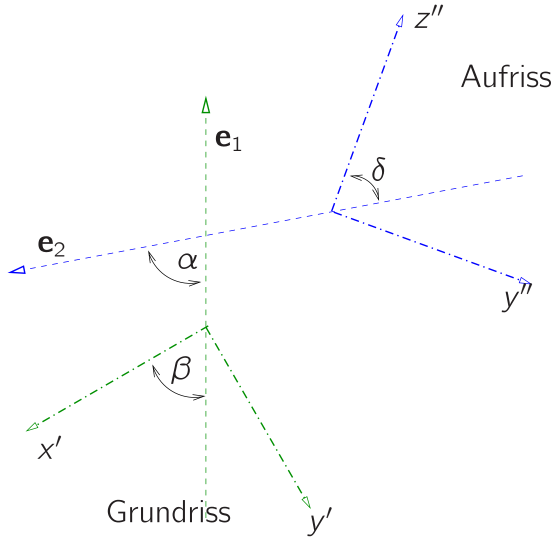


Abbildung 2.7: "Gute" Bilder bei: $\alpha = 50^o ... 90^o, \beta = 5^o ... \alpha, \delta \approx \beta$

2.4 Schatten in der Axonometrie

Der räumliche Eindruck eines Bildes verbessert sich deutlich, wenn man Schatten berücksichtigt. Wir wollen in diesem Abschnitt Schatten in Parallelprojektionen konstruieren. Dabei wollen wir sowohl den Fall von **parallelem** Licht betrachten, bei dem alle Lichtstrahlen parallel sind, wie den einer **zentralen** Lichtquelle, bei dem alle Lichtstrahlen von einem Punkt ausgehen.

Wir betrachten zuerst den Schattenwurf einer Geraden. Alle Lichtstrahlen, die die Strecke treffen, bilden eine Ebene. Diese Ebene und die Bildebene schneiden sich in einer Schnittgeraden, die gerade den Schattenwurf der Gerade auf die Bildebene darstellt. Das gleiche gilt auch für jede andere Ebene, auf die der Schatten der Geraden fällt. Zur Konstruktion des Schattens einer Strecke stellt man daher fest, wohin die Endpunkte ihren Schatten werfen, und verbindet diese.

Wir bezeichnen den Schattenwurf eines Objektes auf die Grundrissebene oder auf andere Objekte als seinen **Schlagschatten**. Wir sprechen dagegen von **Eigenschatten**, wenn Flächen eines Objektes im Schattenwurf desselben Objektes liegen. Schließlich bezeichnen wir die Grenzlinie zwischen dem beleuchteten Teil eines Objektes und seinen im Eigen- oder Schlagschatten liegenden Teilen als **Schattengrenze**. Es ist sinnvoll, den Schatten durch graue Schattierung oder durch Schraffierung einzutragen. Der Übersichtlichkeit halber vereinbaren wir aber, dies nur dann zu tun, wenn die Fläche oder der Schattenwurf sichtbar ist. Bei nicht sichtbarem Schattenwurf wollen wir nur die Randlinie andeuten.

2.4.1 Schatten bei parallelem Licht

(s. LEO S.172)

Wir nehmen als Vorgabe an, dass der Schattenwurf einer senkrechten Kante bekannt ist. Dies wird den Schatten vollständig bestimmen.

Vorgabe: Lichtstrahl ℓ und seine Projektion ℓ' in die Grundrissebene.
Konstruktion:

1. Konstruiere zu P die Grundrissprojektion P'.
2. Schneide eine zum Strahl ℓ parallele Gerade durch P mit der zur Lichtstrahlprojektion ℓ' parallelen Geraden durch P'. Der Schnittpunkt ist der Schattenwurf $\tilde{P}$ von P auf die Grundrissebene.
3. Um den Schattenwurf auf Objekte zu konstruieren, beachte: Wenn eine Strecke parallel zu einer Ebene ist, so sind die Strecke und ihr Schattenwurf auf die Ebene parallel.

Die letzte Bedingung bedeutet zum Beispiel, dass vertikale Linien auf vertikale Flächen auch einen vertikalen Schatten werfen. Auf horizontalen Flächen ist der Schattenwurf einer vertikalen Linie parallel zu ℓ'; er wird wie in 2. konstruiert. Mit dem angegebenen Verfahren kann man den Schatten aller Ecken bestimmen; das wiederum bestimmt die Schattengrenze.

Aufgabe 2.4 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und Lichtrichtung ℓ durch den Schattenwurf einer senkrechten Kante. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.8).*

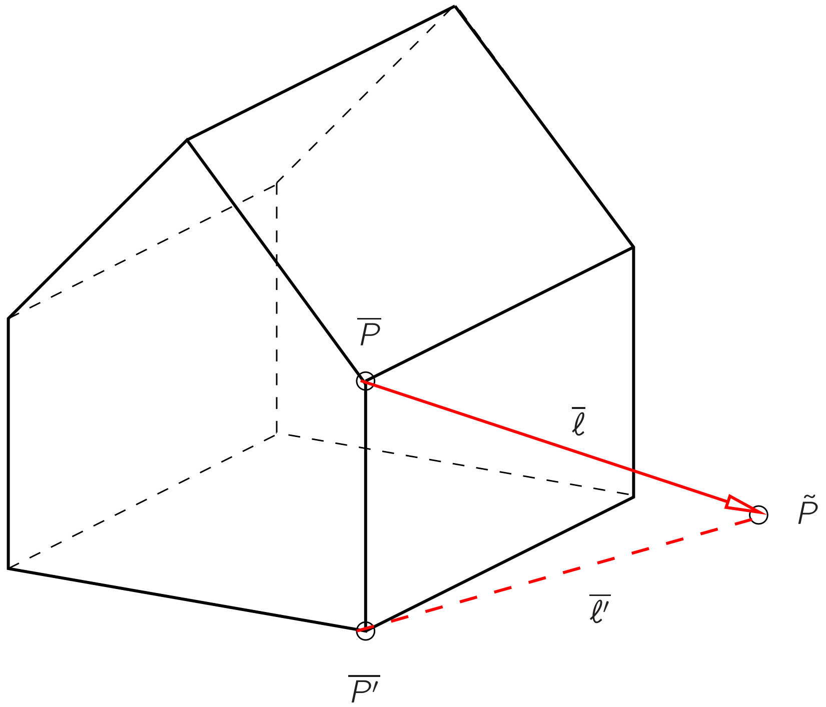


Abbildung 2.8: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

Aufgabe 2.5 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild zweier Quader und Lichtrichtung ℓ durch den Schattenwurf einer Kante (Abb. 2.9). Zeichne den Schatten.*

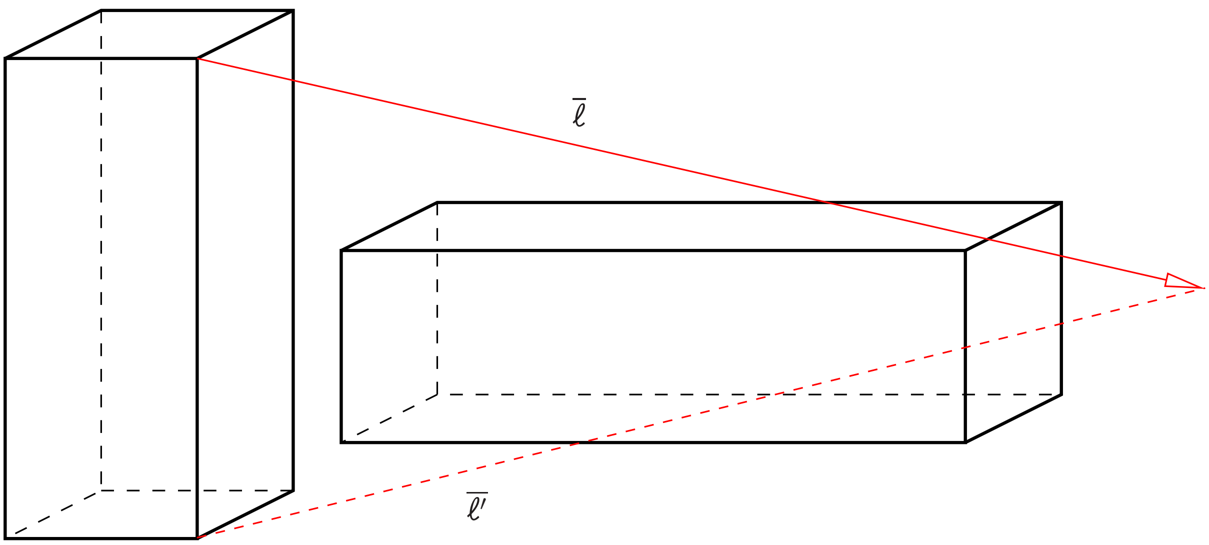


Abbildung 2.9: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

2.4.2 Schatten bei zentralem Licht

(s. LEO S.181)

Die Konstruktion ist überraschend ähnlich zum Fall von parallelem Licht:

Vorgabe: Axonometrie mit Punkt-Lichtquelle L und ihrem Fußpunkt L'.
Konstruktion:

1. Konstruiere zu P die Grundrissprojektion P'.
2. Der Schattenwurf $\tilde{P}$ von P in der Grundrissebene ist der Schnittpunkt der Geraden LP und $L'P'$.
3. Um den Schattenwurf auf Objekte zu konstruieren, beachte: Wenn eine Strecke parallel zu einer Ebene ist, so sind die Strecke und ihr Schattenwurf auf die Ebene parallel.

Zur Begründung dieses Verfahrens stellt man sich am besten vor, dass man die Gerade $P'P$ ausgehend von P' mit Lichtstrahlen durchläuft. Der Schatten wandert dann auf der Geraden $L'P'$ vom Punkt P' nach $\tilde{P}$.

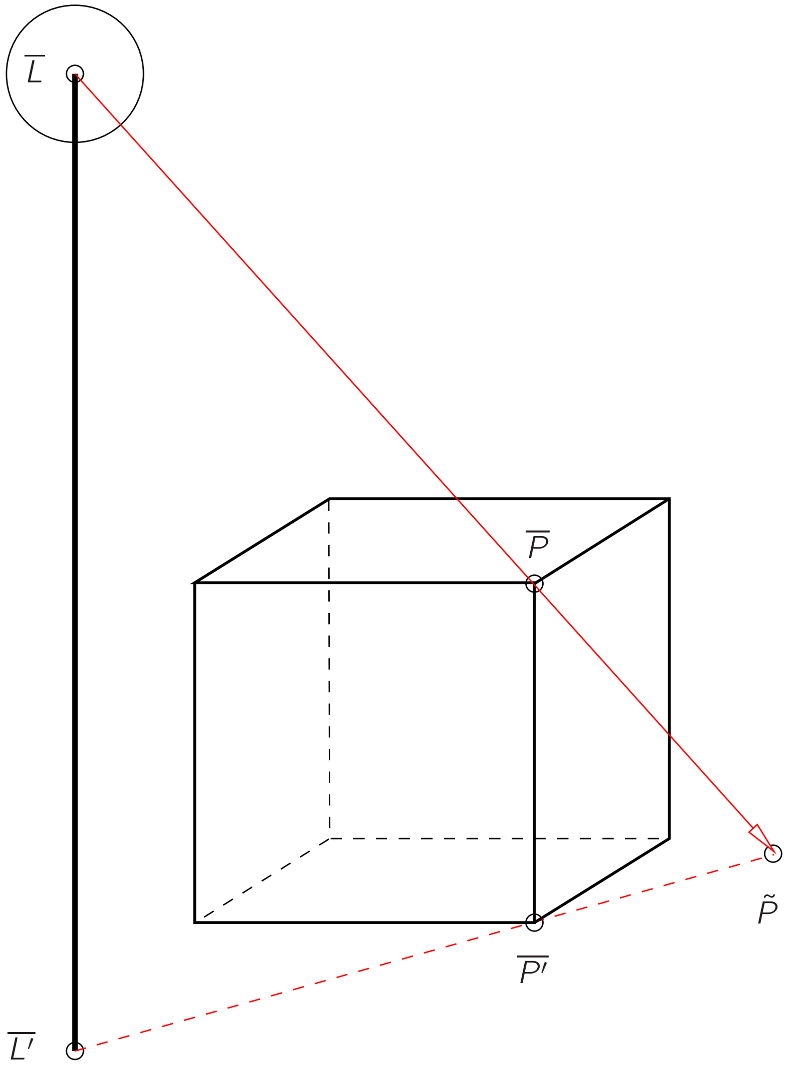


Abbildung 2.10: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

Aufgabe 2.6 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und die Lichtquelle L mit ihrem Grundriss. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.11).*

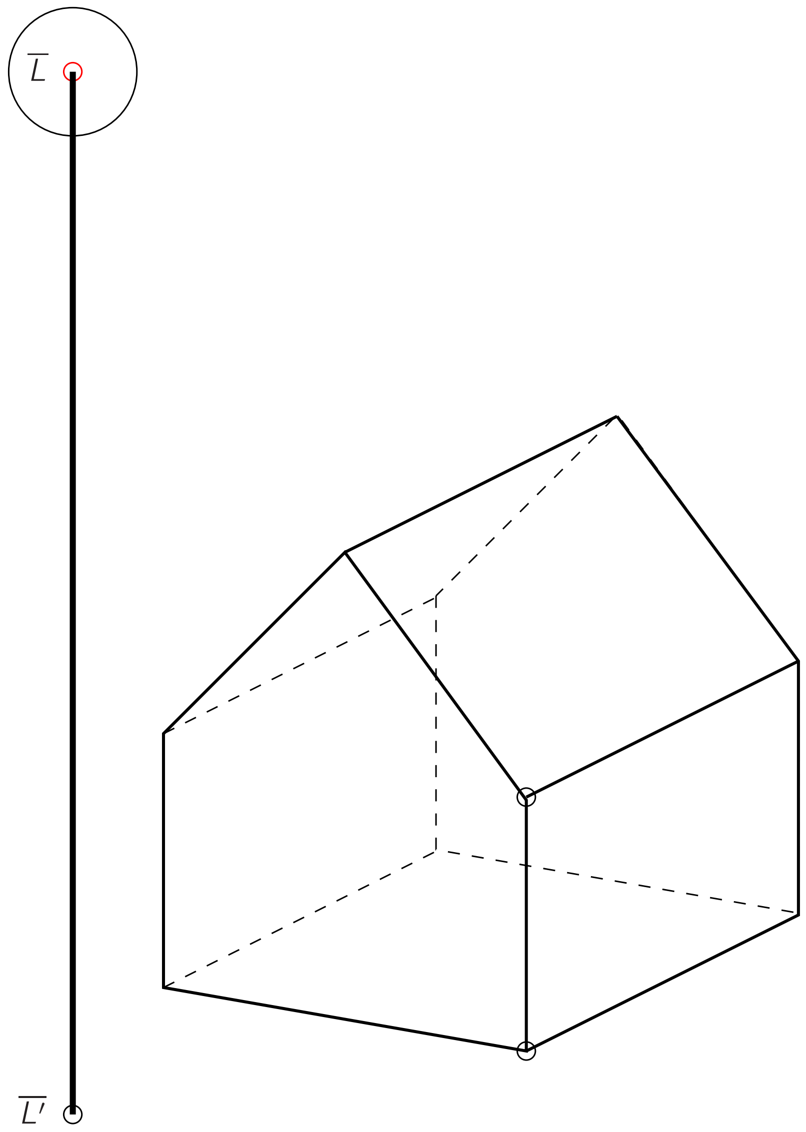


Abbildung 2.11: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

Kapitel 3

Zwei– und Mehrtafelprojektion, Dachausmittelung

3.1 Zweitafelprojektion von Punkten

(s. LEO S.82)

Wir erinnern zunächst an die in Abschnitt 1.4 erklärten Begriffe **Grundriss**, **Aufriss**, **Risskante**, **Ordner**. Die nächste Zeichnung zeigt einige Sonderlagen von Punkten:

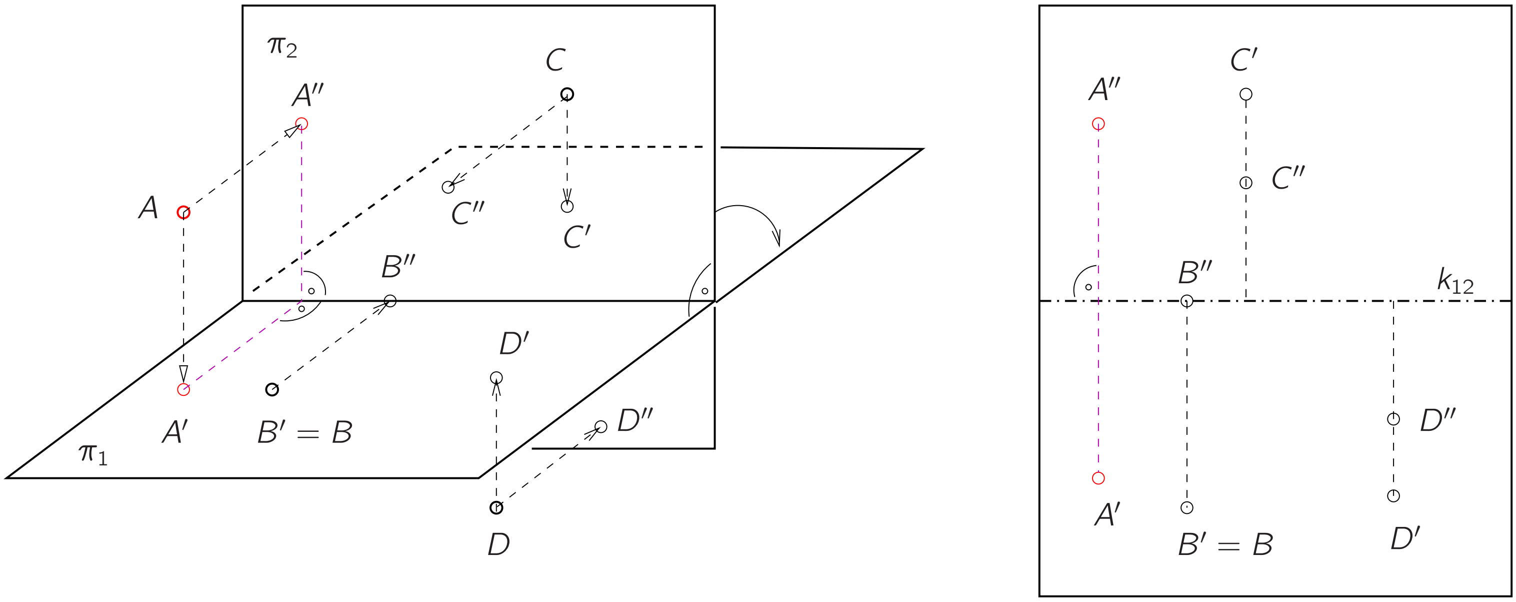


Abbildung 3.1: Zweitafelprojektion von Punkten

Beachte: Der Aufriss eines Punktes liegt nicht immer oberhalb der Risskante (s. Abb. 3.1). Analog muss der Grundriss eines Punktes nicht immer unterhalb der Risskante liegen!

3.2 Zweitafelprojektion von Geraden

(s. LEO S.83,89)

Die Projektion einer Gerade ist i.A. wieder eine Gerade:

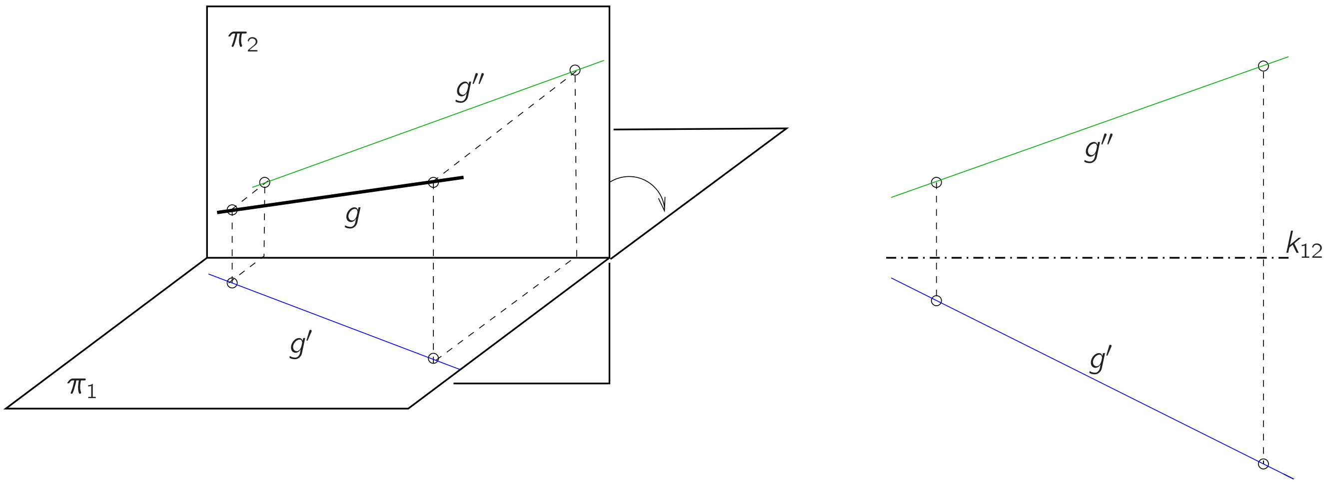


Abbildung 3.2: Zweitafelprojektion einer Gerade

Es gibt einige Sonderlagen für Geraden:
Eine zu π_1 parallele Gerade heißt **Höhenlinie**, eine zu π_2 parallele **Frontlinie**. Eine **Hauptgerade** ist eine Höhenlinie oder eine Frontlinie. Eine für Maßaufgaben wichtige Eigenschaft von Hauptgeraden ist:

Der Grundriss einer Höhenlinie ist unverzerrt. Der Aufriss einer Frontlinie ist unverzerrt.

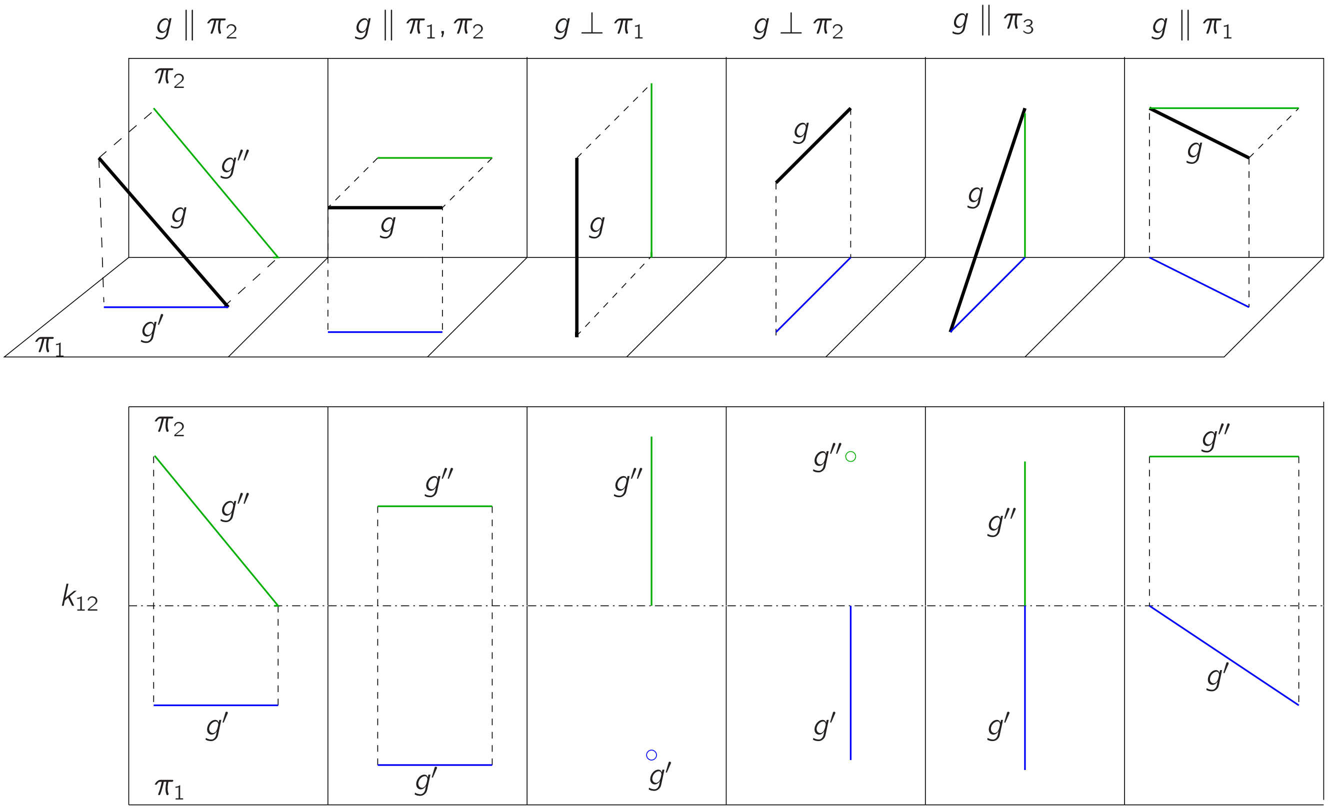


Abbildung 3.3: Sonderlagen von Geraden

Die Durchstoßpunkte einer Geraden g mit den Risstafeln nennt man **Spurpunkte** von g.

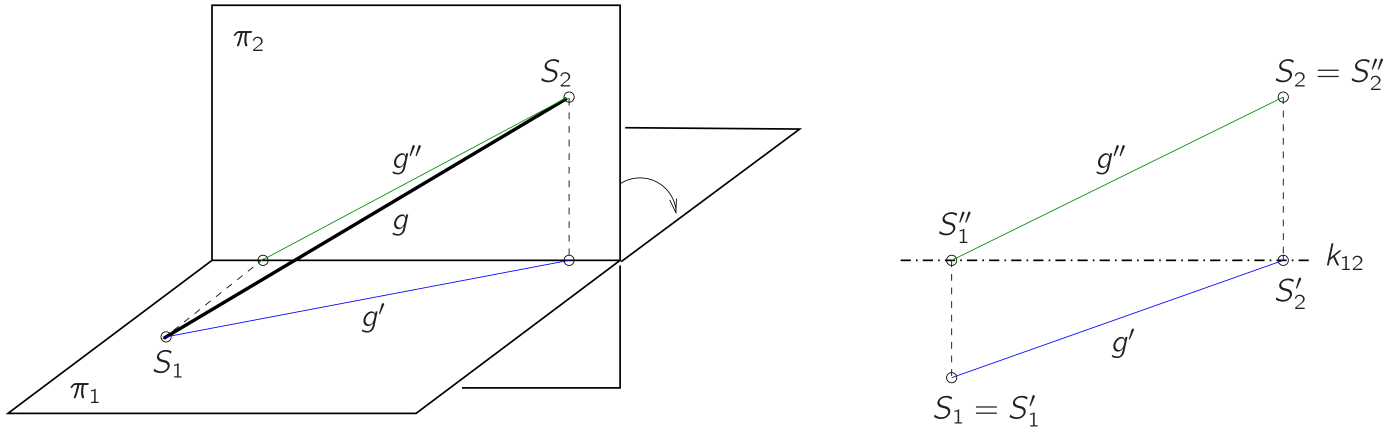


Abbildung 3.4: Spurpunkte einer Gerade

Die Risse paralleler Geraden sind parallel:

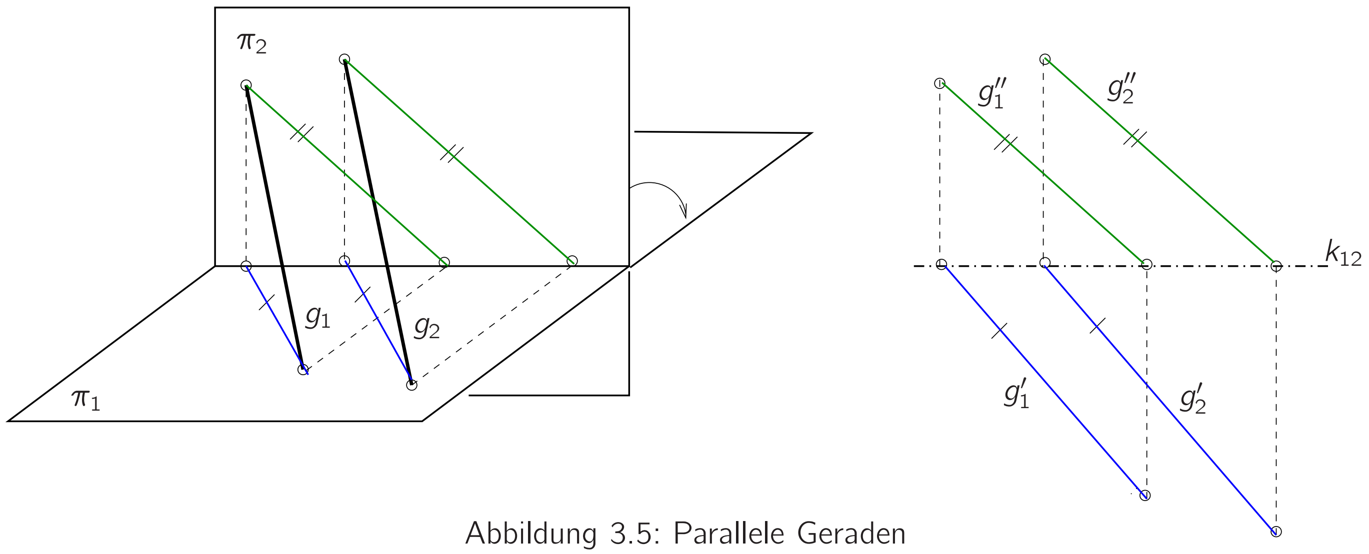


Abbildung 3.5: Parallele Geraden

Schneiden sich zwei Geraden g_1, g_2 in einem Punkt S, so müssen S' (in π_1) und S'' (in π_2) auf einem Ordner liegen. Nur dann ist S', S'' das Bildpunktpaar eines beiden Geraden gemeinsamen Punktes (s. Abb. 3.6).
Wir erinnern daran, dass zwei nicht parallele Geraden **windschief** heißen, wenn sie keinen Schnittpunkt haben. Sind zwei Geraden g_1, g_2 zueinander *windschief*, dann liegt der Schnittpunkt S' von g_1' und g_2' im Grundriss mit dem Schnittpunkt T'' (von g_1'' und g_2'') im Aufriss nicht auf einem Ordner (s. Abb. 3.7).
Insgesamt erhalten wir:

Zwei Geraden g_1, g_2 haben einen Schnittpunkt, wenn $g_1' \cap g_2'$, $g_1'' \cap g_2''$ auf demselben Ordner liegen.

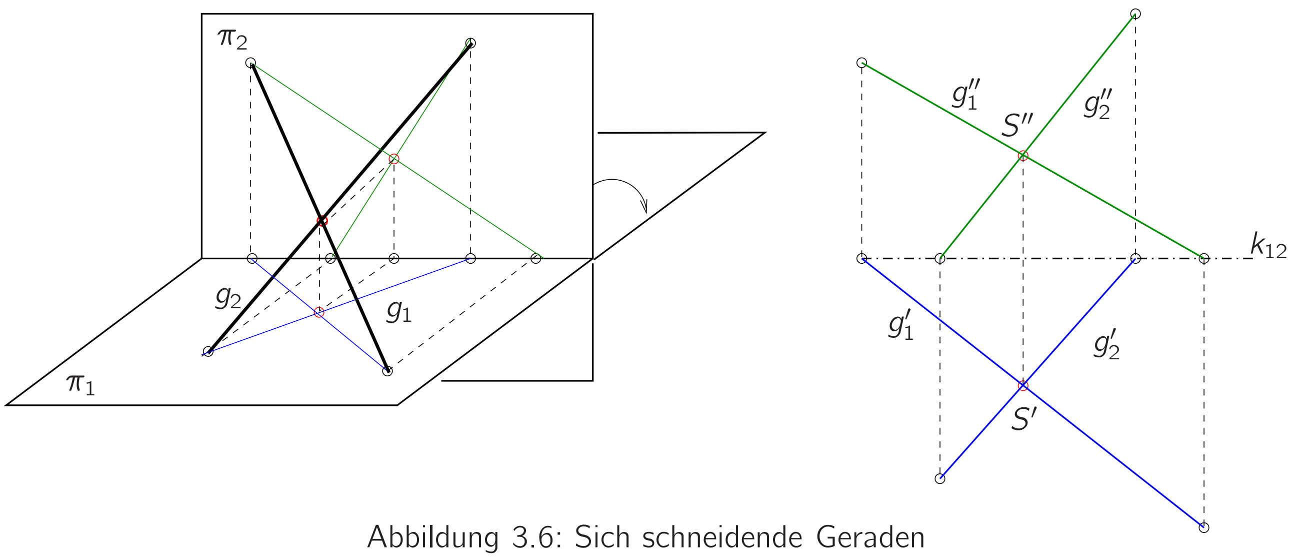


Abbildung 3.6: Sich schneidende Geraden

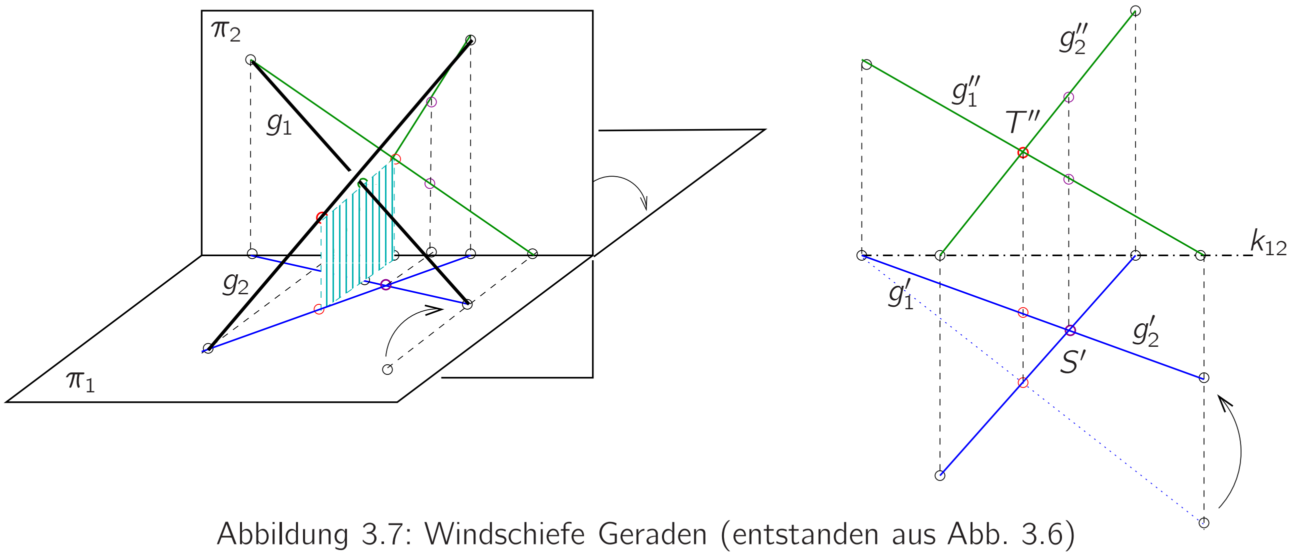


Abbildung 3.7: Windschiefe Geraden (entstanden aus Abb. 3.6)

Aufgabe 3.1 *Liegen die vier in Grund– und Aufriss gegebenen Punkte (Abb. 3.8) in einer Ebene?*

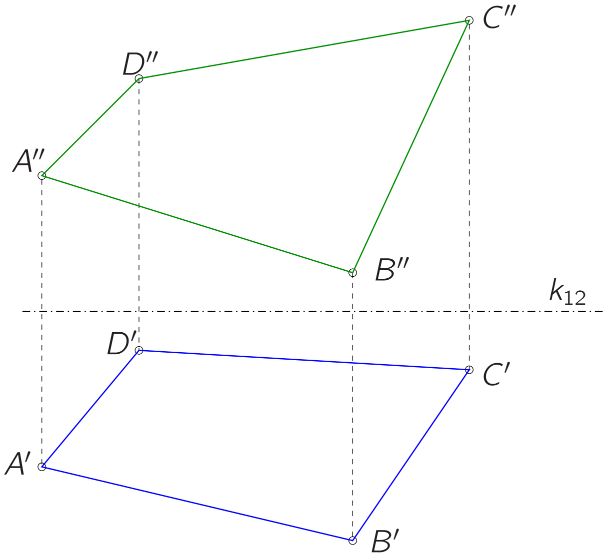


Abbildung 3.8: Ist das Viereck eben?

Aufgabe 3.2 *Durch die Grund– und Aufrisse der Geraden a, b, c, d ist ein Prisma gegeben (Abb. 3.9). Bestimme die Schnittfigur des Prismas mit der Grundrisstafel π_1.*

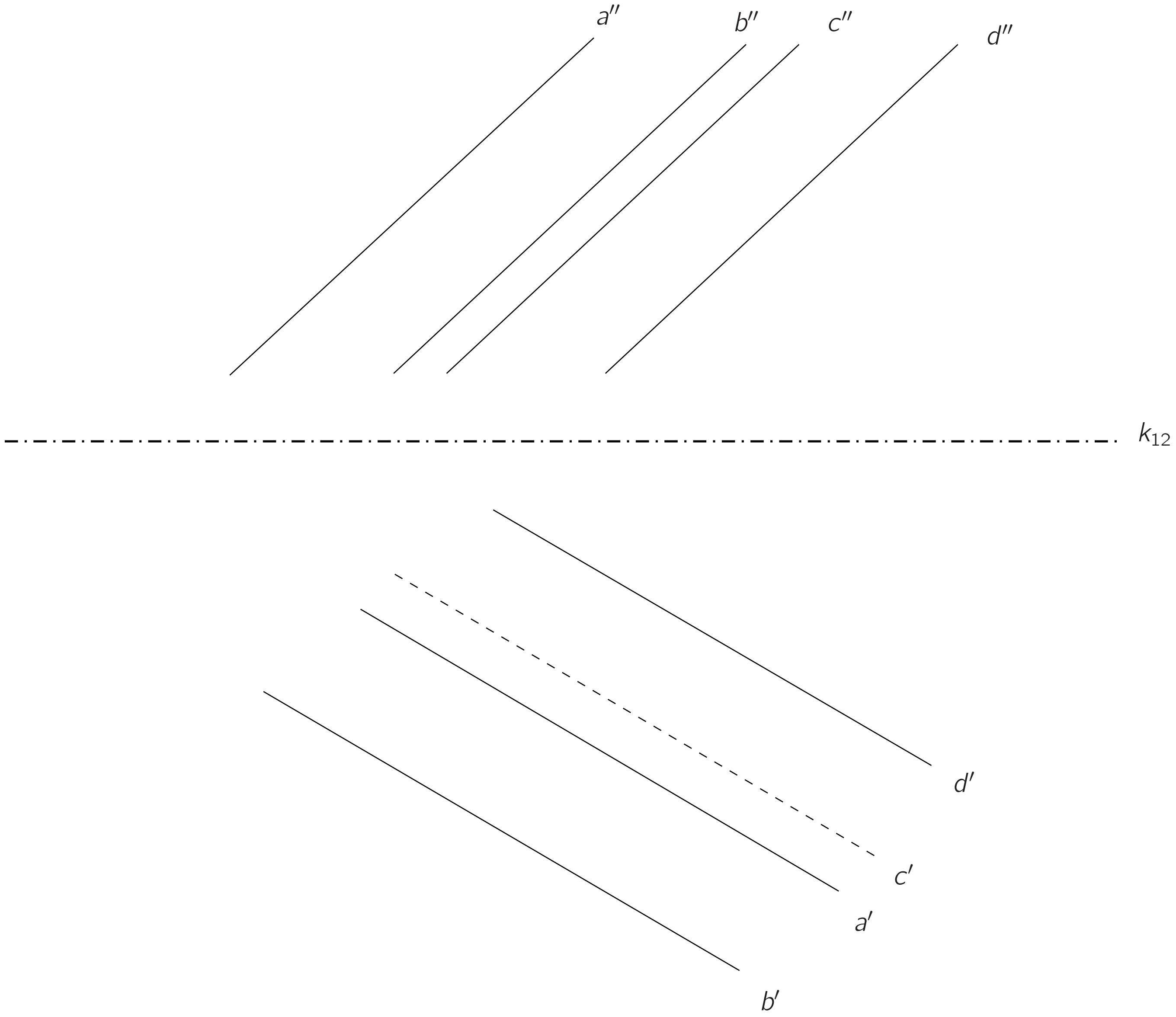


Abbildung 3.9: Grundriss–Spur eines Balkens

Bei sich schneidenden Geraden interessiert oft die wahre Größe des Schnittwinkels. Da ebene Figuren unverzerrt abgebildet werden, wenn sie parallel zur Bildtafel sind, gilt:

> Der Schnittwinkel zweier Geraden erscheint in der Risstafel π_i unverzerrt, wenn beide Geraden parallel zu π_i sind.

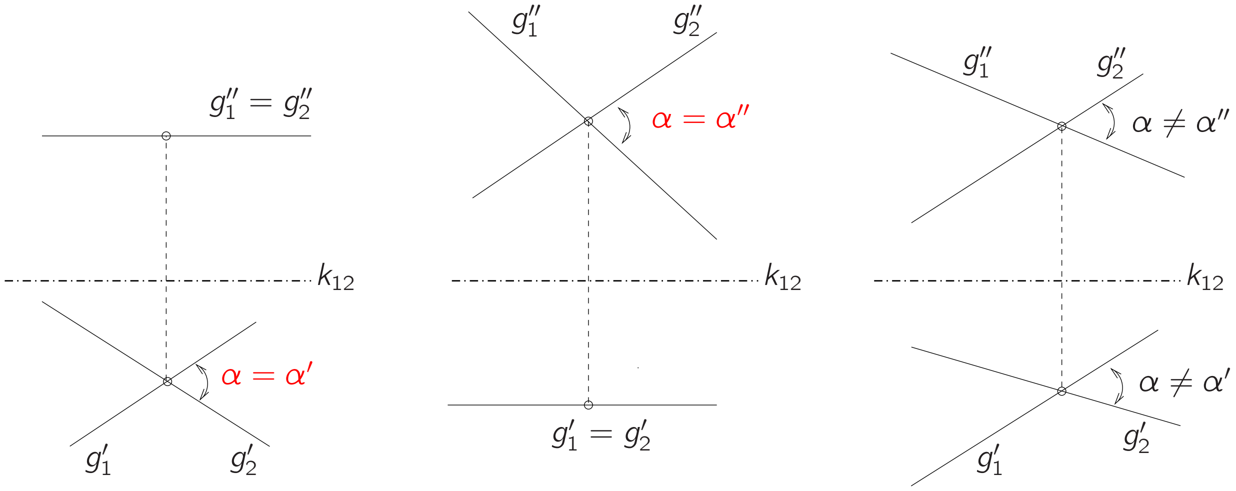


Abbildung 3.10: Winkel schneidender Geraden

Für den rechten Winkel kann die Voraussetzung abgeschwächt werden:

> Ein **rechter Winkel** wird in der Risstafel π_i als rechter Winkel abgebildet, wenn (wenigstens) **ein** Schenkel parallel zu π_i ist.

Aufgabe 3.3 *Wo erscheinen in den folgenden Rissen eines Hauses (Abb. 3.11) Winkel in wahrer Größe?*

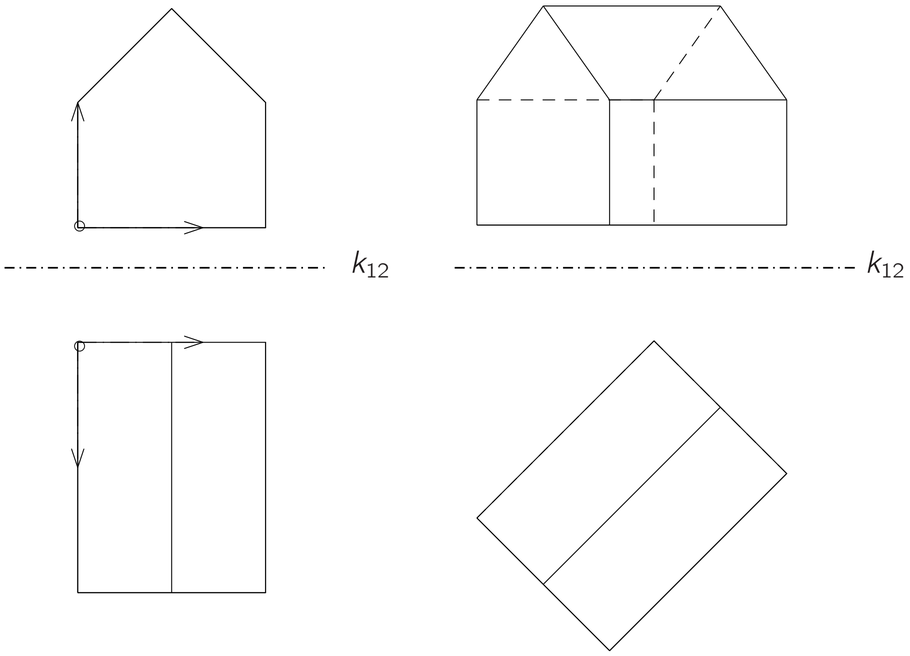


Abbildung 3.11: Wahre Winkel?

3.3 Zweitafelprojektion einer Ebene

(s. LEO S.91)

Eine Ebene kann im Raum festgelegt werden durch
(a) drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
(b) eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
(c) zwei parallele oder sich schneidende Geraden.

Aufgabe 3.4 *Durch die Punkte A, B, C ist eine Ebene ε gegeben (Abb. 3.12). Von einem Punkt $P \in \varepsilon$ ist P'' bekannt. Bestimme P'.*

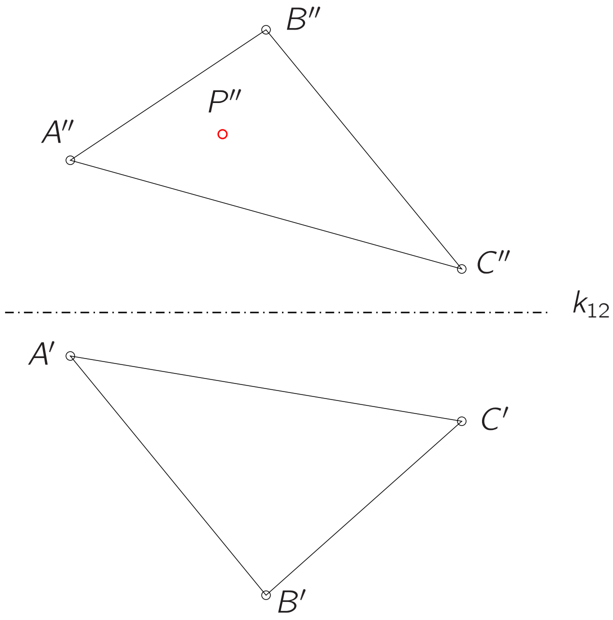


Abbildung 3.12: Punkt in einem Dreieck

Die Schnittgeraden einer Ebene ε mit den Risstafeln, falls sie existieren, heißen die **Spuren** von ε.

Aufgabe 3.5 *Die Ebene ε ist durch die Hauptgeraden h_1, h_2 durch den Punkt P gegeben (Abb. 3.13). Bestimme die Spuren von ε.*

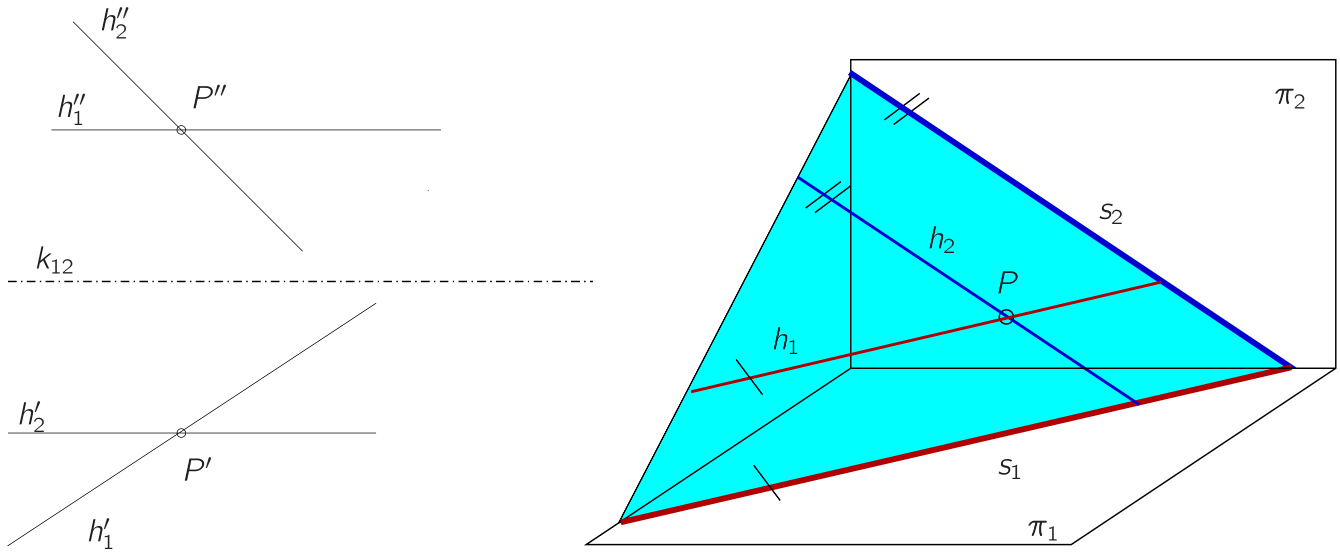


Abbildung 3.13: Spur einer Ebene

Aufgabe 3.6 *Die Ebene ε ist durch ihre Spuren s_1, s_2 gegeben (Abb. 3.14). Von dem Punkt P ist der Aufriss P'' bekannt. Bestimme P' und die Hauptgeraden durch P.*

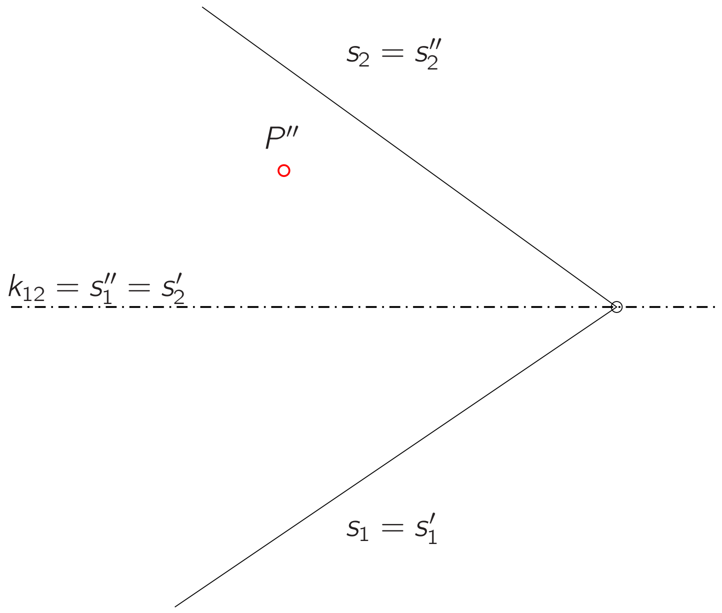


Abbildung 3.14: Punkt und Hauptgeraden in einer Ebene

Aufgabe 3.7 *Gegeben: Satteldach eines Hauses und der Grundriss zweier Reklamebuchstaben auf einer Dachfläche (Abb. 3.15). Gesucht: Aufriss der Buchstaben.*

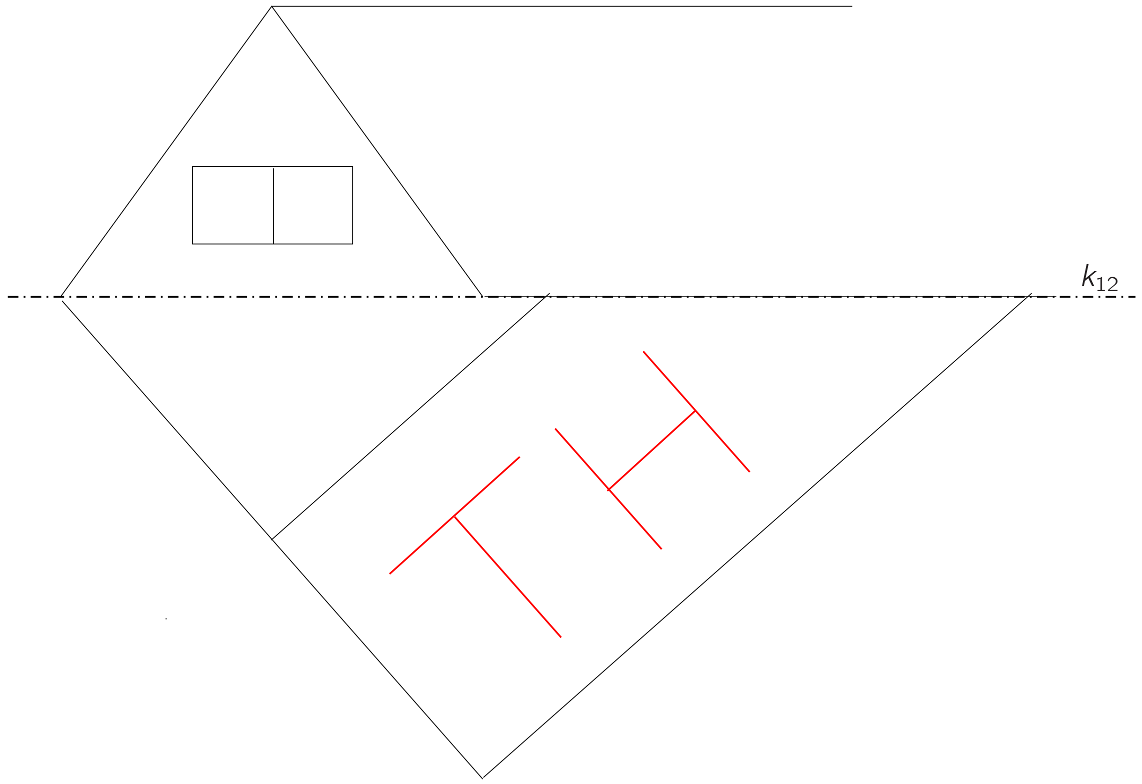


Abbildung 3.15: Reklame auf einem Dach

Einige Sonderlagen für Ebenen (Abb. 3.16):

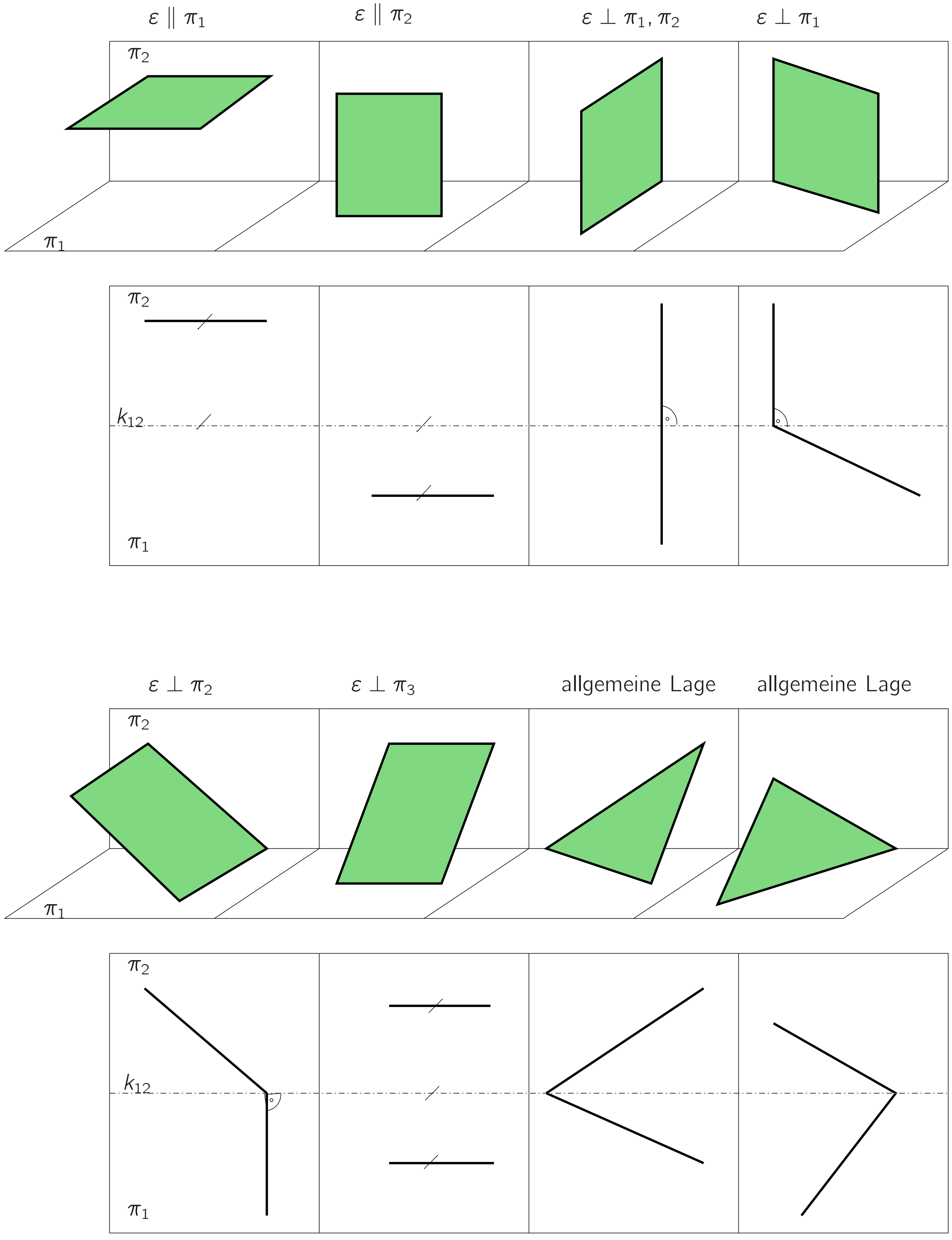


Abbildung 3.16: Sonderlagen von Ebenen

3.4 Umprojektion

(s. LEO S.96)

Eine Umprojektion ist dann nützlich, wenn Grund- und Aufriss ein Objekt in zu spezieller Lage zeigen und eine anschaulichere Parallelprojektion aus einer anderen Richtung gewünscht ist.
Durch Umprojektion entsteht aus Grund- und Aufriss ein weiterer Riss (senkrechte Parallelprojektion). Die neue Projektionsebene ist allerdings nicht beliebig, sondern muss entweder auf der Grundriss- oder der Aufrissebene senkrecht stehen. In Abb. 3.17 steht die neue Projektionsebene π_3 senkrecht auf π_1, d.h. die Umprojektion ersetzt den Aufriss durch einen anderen Seitenriss.

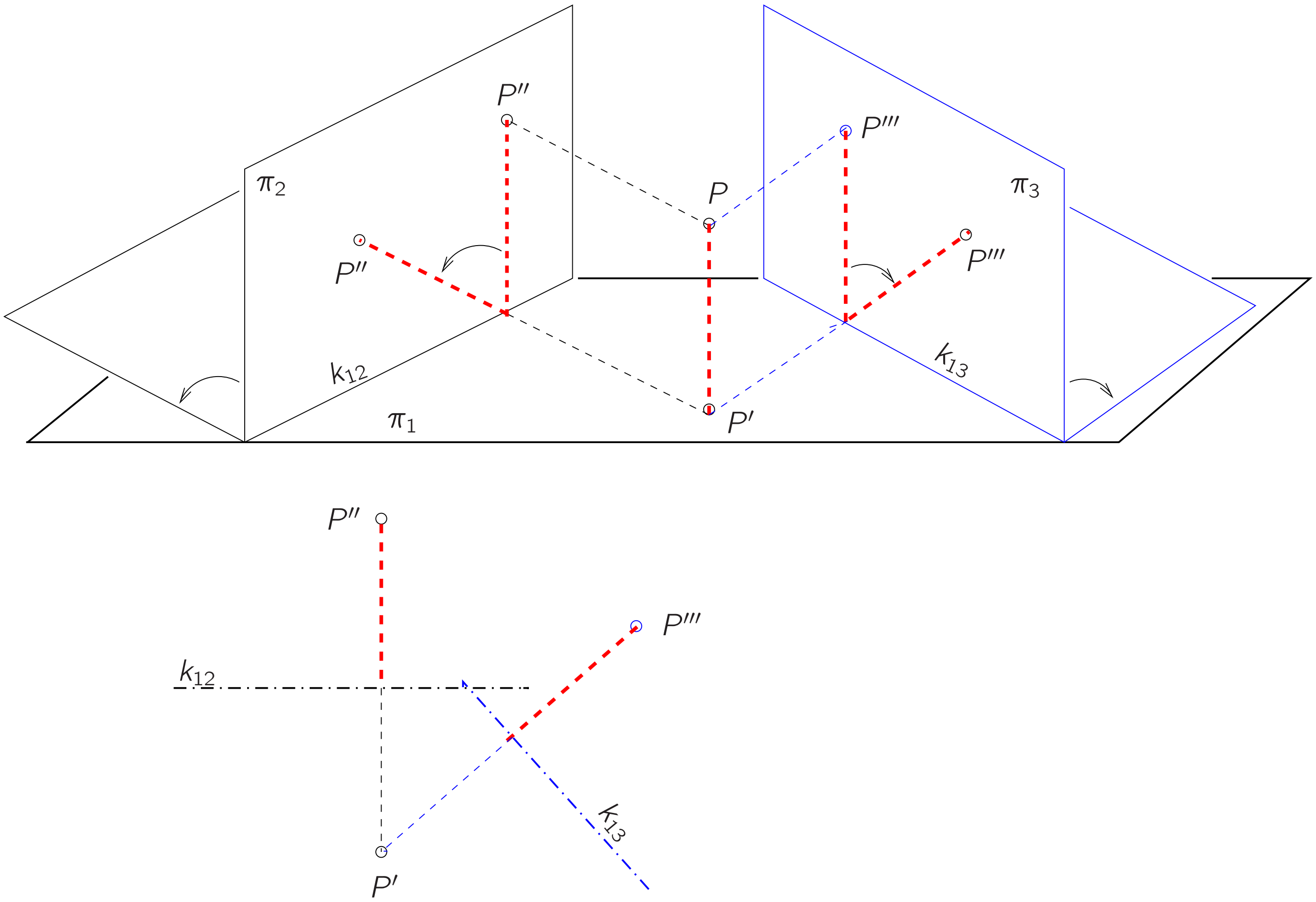


Abbildung 3.17: Umprojektion eines Punktes

Gegeben: Punkt P mit Grund- und Aufriss P', P'', sowie eine Risskante k_{13} für eine neue Aufrisstafel π_3.

Durchführung: Der gesuchte Aufriss P''' des Punktes P liegt

(1) auf der Senkrechten durch P' zur neuen Risskante k_{13} (neuer Ordner).

(2) Er hat denselben Abstand von k_{13} wie der alte Aufriss P'' von der alten Risskante k_{12}.

Die Durchführung für den Fall, dass π_3 senkrecht auf der Aufrisstafel π_2 steht, verläuft analog (Abb. 3.18).

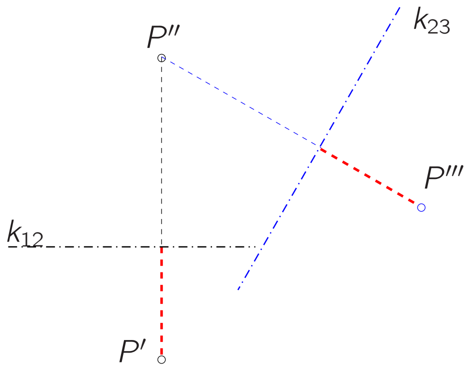


Abbildung 3.18: Umprojektion eines Punktes (Grundriss wird ersetzt)

Aufgabe 3.8 *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild eines Hauses her (Abb. 3.19).*

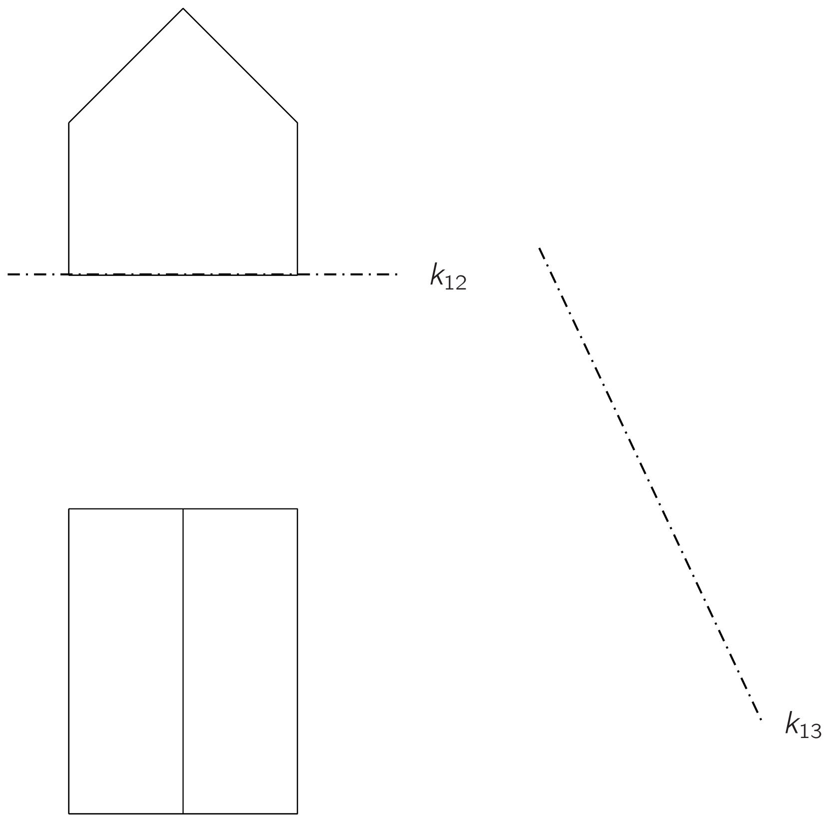


Abbildung 3.19: Umprojektion eines Hauses

Die Blickrichtung v entscheidet über die Sichtbarkeit; es ist daher sinnvoll, sie in die Umprojektion einzutragen.

Man kann auch eine beliebige Blickrichtung v durch v' und v'' vorgeben und eine Parallelprojektion in Richtung v durch doppelte Umprojektion erzeugen.

Aufgabe 3.9 *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild einer Pyramide her (Abb. 3.20).*

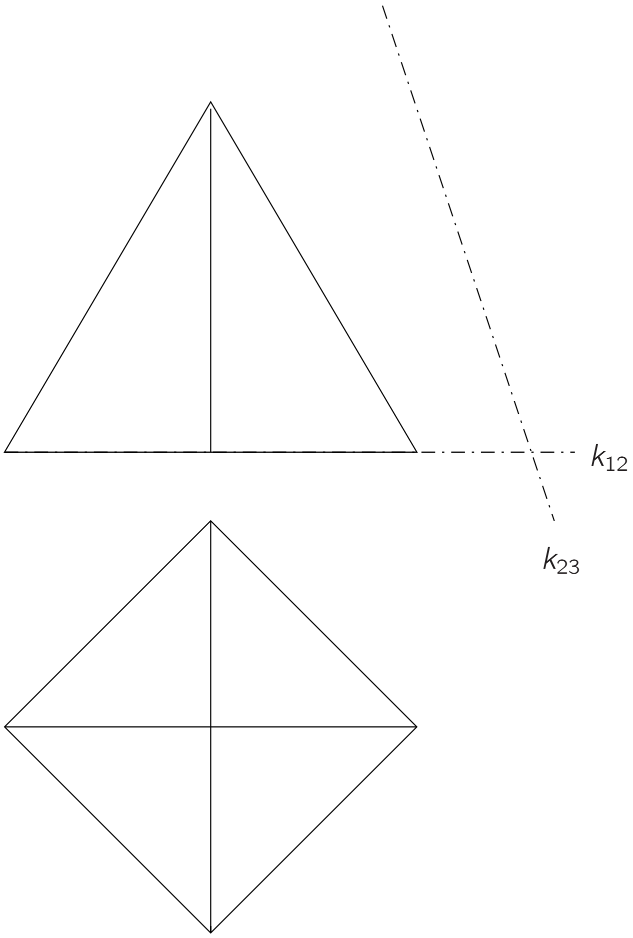


Abbildung 3.20: Umprojektion einer Pyramide (Grundriss wird ersetzt)

Umprojektionen können mehrfach hintereinander durchgeführt werden. Sinnvoll ist eine **doppelte Umprojektion**, denn dadurch kann man aus Grund- und Aufriss eine Parallelprojektion auf eine beliebige Projektionsebene herstellen. Man muss dabei jeweils den Abstand zur neuen Risskante aus dem jeweils wegfallenden Riss entnehmen.

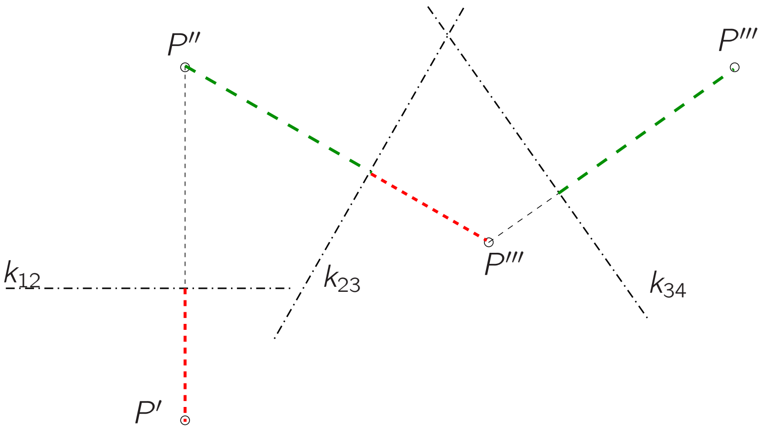


Abbildung 3.21: Mehrfachumprojektion eines Punktes

3.5 Grundaufgaben

3.5.1 Schnittpunkt Gerade–Ebene (Durchstoßpunkt)

(s. LEO S.92)

Gegeben: Gerade g durch Grundriss g' und Aufriss g'',
Ebene ε durch drei Punkte A, B, C in Grund- und Aufriss (Aufgabe 3.10).
Gesucht: Schnittpunkt $D = g \cap \varepsilon$.
Lösungs**idee**: Es sei μ die zu π_1 (oder π_2) senkrechte Ebene, die g enthält. Sie schneidet ε in der Schnittgeraden $s = \mu \cap \varepsilon$. Dann gilt für den gesuchten Durchstoßpunkt $D = s \cap g$.

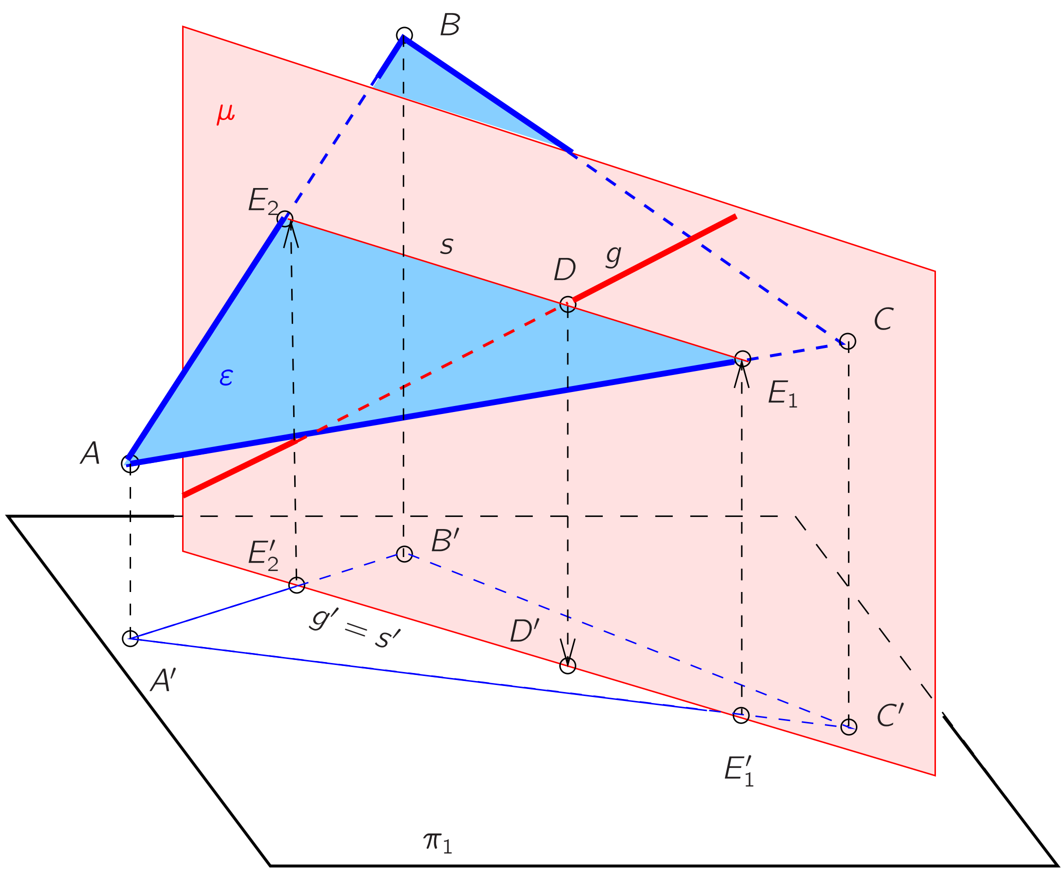


Abbildung 3.22: Schnitt Gerade–Ebene

Durchführung, falls $\mu \perp \pi_1$ gewählt ist:

(1) Wähle zwei Geraden e_1, e_2 der Ebene ε, die nicht zu g' parallel sind. e_1', e_1'', e_2', e_2'' seien ihre Risse.
(2) Der Schnitt von g' mit e_1' bzw. e_2' liefert E_1' bzw. E_2'.
(3) Bestimme (mit Ordnern) E_1'', E_2'' auf e_1'', e_2''.
(4) Die Gerade durch E_1'' und E_2'' ist der Aufriss s'' der Hilfsgeraden s.
(5) $D'' = s'' \cap g''$ ist der Aufriss des Durchstoßpunktes D.
(6) D' ist der Schnittpunkt des Ordners durch D'' mit g'.

Die Durchführung für den Fall, dass $\mu \perp \pi_2$ gewählt wurde, verläuft analog; man muss nur die Rollen von Grund- und Aufriss vertauschen.

Aufgabe 3.10 *Bestimme den Schnittpunkt einer Geraden mit der durch ein Dreieck gegebenen Ebene (Abb. 3.23). Entscheide über die Sichtbarkeit der Geradenabschnitte durch Betrachtung des jeweils anderen Risses.*

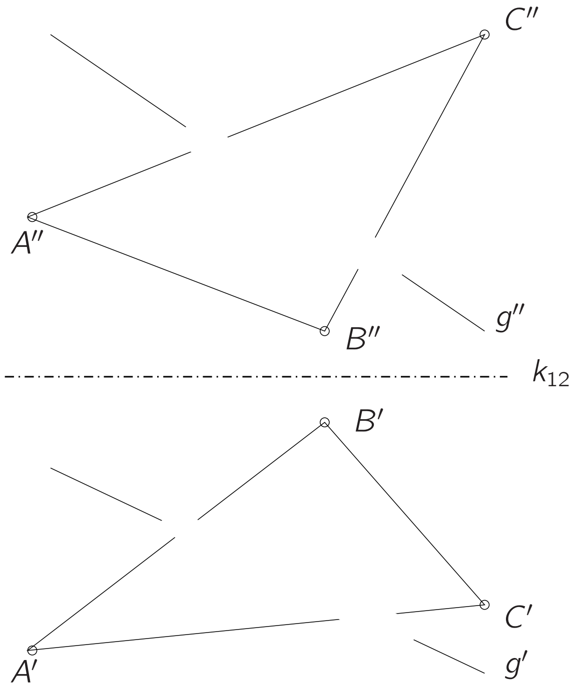


Abbildung 3.23: Schnitt Gerade–Ebene

Aufgabe 3.11 *In Grund- und Aufriss ist ein dreikantiger Balken und ein ebenes Viereck gegeben (Abb. 3.24). Bestimme Grund- und Aufriss der Schnittfigur und entscheide über die Sichtbarkeit des Balkens.*

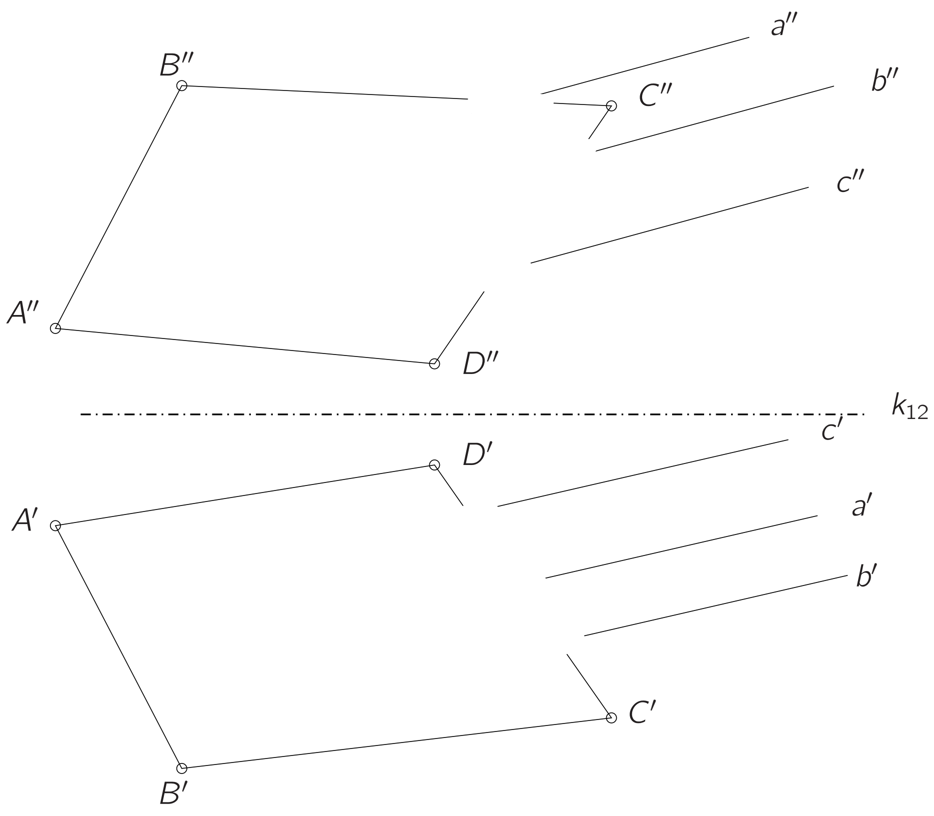


Abbildung 3.24: Schnitt Balken–Ebene

Die Idee, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene mittels einer senkrechten Hilfsebene zu bestimmen, lässt sich direkt bei der Konstruktion eines Schattenpunktes auf eine geneigte Ebene verwenden.

Aufgabe 3.12 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hochhauses (Quader), zweier Fabrikhallen mit schrägen Dächern, sowie paralleles Licht durch die Lichtrichtung ℓ und den Schattenwurf einer Kante (Abb. 3.25). Zeichne den Schatten.*

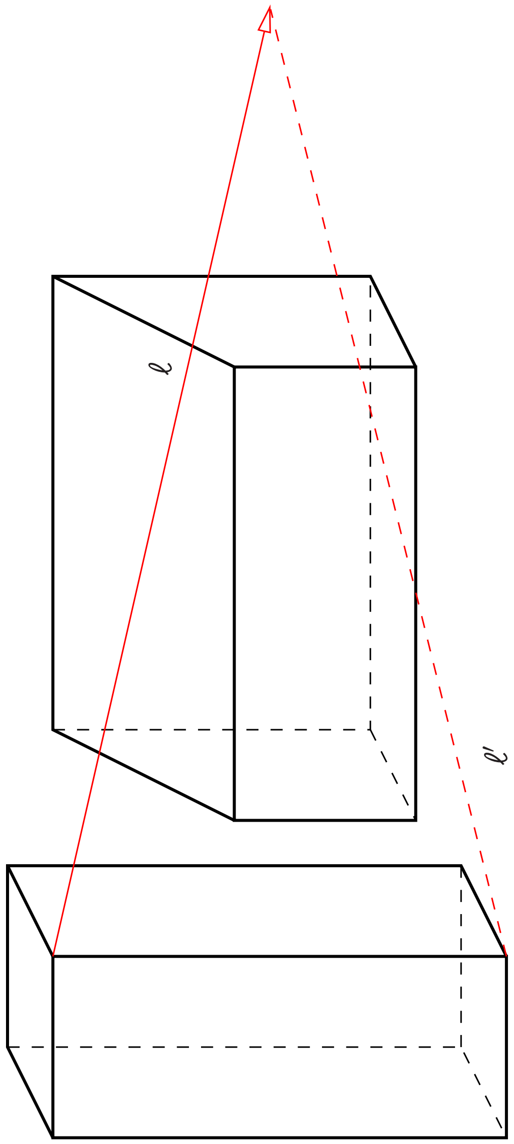


Abbildung 3.25: Schatten auf geneigte Ebenen bei parallelem Licht

3.5.2 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.100)

Gegeben: Strecke $\overline{AB}$ in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die wahre Länge dieser Strecke.

Lösungs**idee**: Eine Strecke erscheint im Aufriss (bzw. Grundriss) in wahrer Länge, wenn die Strecke zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) parallel ist.
Wir geben hier zwei Möglichkeiten an, die Strecke „tafelparallel“ zu machen:

1. Möglichkeit:

Man dreht die Strecke um eine zur Grundrisstafel (bzw. Aufrisstafel) senkrechte Achse, bis sie parallel zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) ist.

Durchführung der Drehung um eine zu π_1 senkrechte Achse durch B:
(1) Drehe A' um B', bis die gedrehte Strecke parallel zu k_{12} ist. Der gedrehte Punkt sei $\tilde{A}'$ (Grundriss von $\tilde{A}$, dem um B gedrehten Punkt A).
(2) $\tilde{A}''$ liegt auf dem Ordner durch $\tilde{A}'$ und auf der Parallelen durch A'' zur Risskante (bei der Drehung bleibt $\tilde{A}$ auf der gleichen Höhe wie A !).
(3) $|\tilde{A}''\, B''|$ ist die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$.

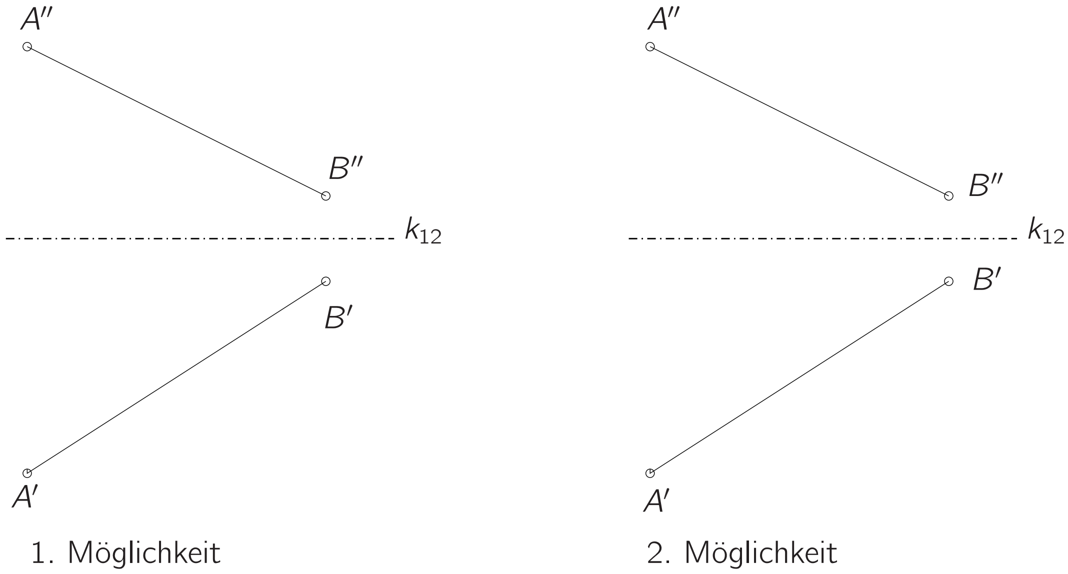


Abbildung 3.26: Wahre Länge einer Strecke

2. Möglichkeit:

Man legt durch die Strecke $\overline{AB}$ eine zu π_1 (bzw. π_2) senkrechte Ebene μ und dreht μ um eine Höhenlinie (Frontlinie) in eine horizontale (senkrechte) Lage.

Durchführung der Drehung um eine Höhenlinie durch B:
(1) Zeichne den Aufriss C'' des Punktes C, der senkrecht unter A liegt und dieselbe Höhe wie B hat. Es ist $C' = A'$.
(2) Man drehe das rechtwinklige Dreieck A, B, C um die Kathete $\overline{BC}$ um 90° parallel zu π_1, indem man in $A'(= C')$ senkrecht die Strecke $\overline{C''A''}$ anträgt. Die Hypothenuse des entstandenen Dreiecks ist die wahre Länge der Strecke $\overline{A, B}$.
(Entspricht der Einführung einer neuen Risstafel parallel zur Strecke $\overline{AB}$.)

Aufgabe 3.13 *Von einem Punkt P und einer Geraden g sind Grund- und Aufriss gegeben (Abb. 3.27). Trage auf g eine in P beginnende Strecke der Länge 4 cm ab.*

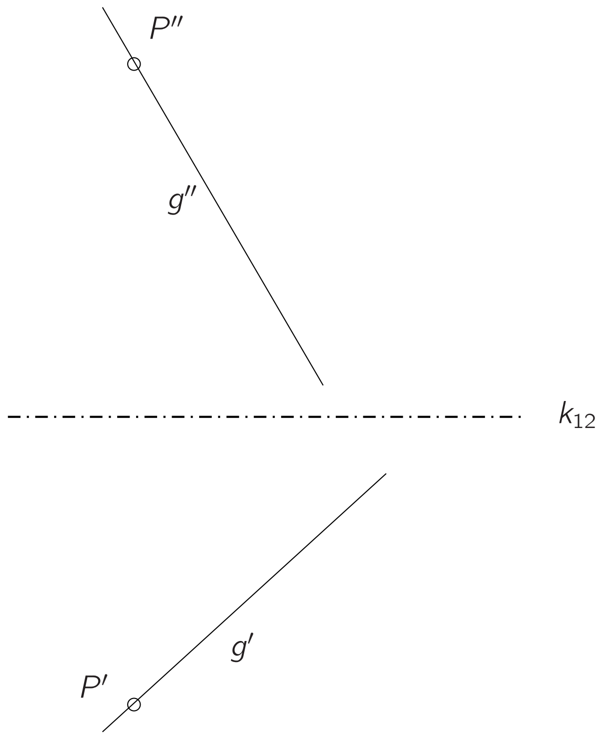


Abbildung 3.27: Antragen der wahren Länge einer Strecke

Aufgabe 3.14 *Gegeben: Satteldach, Kaminkopf (K) und die Richtung der Sonnenstrahlen (S) (Abb. 3.28). Gesucht: a) Schnitt des Kamins mit der Dachfläche. b) Schatten des Kamins auf der Dachfläche. c) Wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ und die Dachneigung α.*

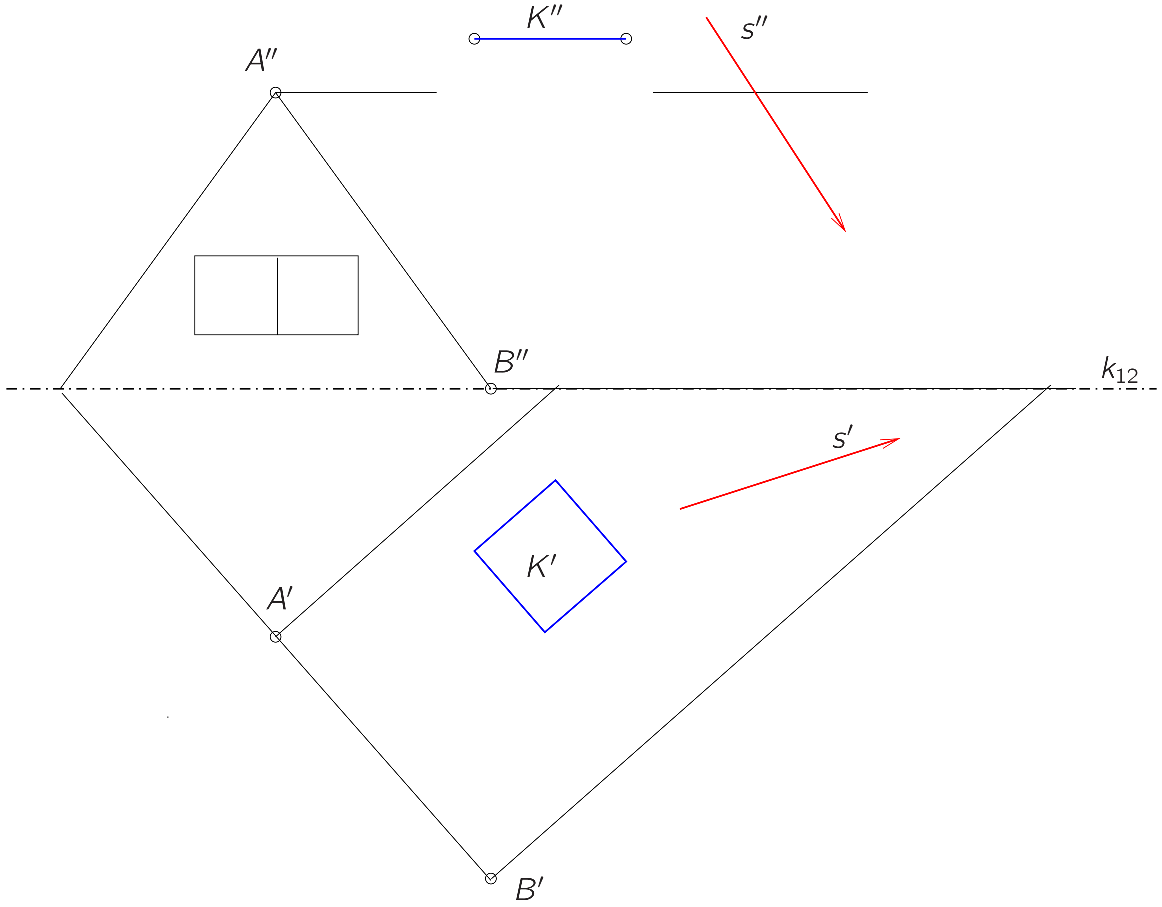


Abbildung 3.28: Schatten eines Kamins

3.5.3 Wahre Gestalt einer ebenen Figur

(s. LEO S.103)

Gegeben: Das Dreieck A, B, C in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Wahre Gestalt des Dreiecks.

Lösungs**idee**: Einführung einer Risstafel π_3 senkrecht zum Dreieck. Der Riss des Dreiecks erscheint in π_3 als Strecke. Jetzt lässt sich eine Risstafel π_4 parallel zu dem Dreieck einführen und das Dreieck erscheint in π_4 in wahrer Gestalt.

Durchführung, falls π_3 der Grundrisstafel zugeordnet wird:

(1) Bestimme eine Höhenlinie h des Dreiecks.
(2) Neue Risskante $k_{13} \perp h'$. Umprojektion des Dreiecks.
A''', B''', C''' liegen auf einer Geraden d'''.
(3) Neue Risskante $k_{34}||d'''$. Der neue Riss zeigt das Dreieck in wahrer Gestalt.

Aufgabe 3.15 *Bestimme die wahre Gestalt eines in Grund– und Aufriss gegebenen Dreiecks (Abb. 3.29).*

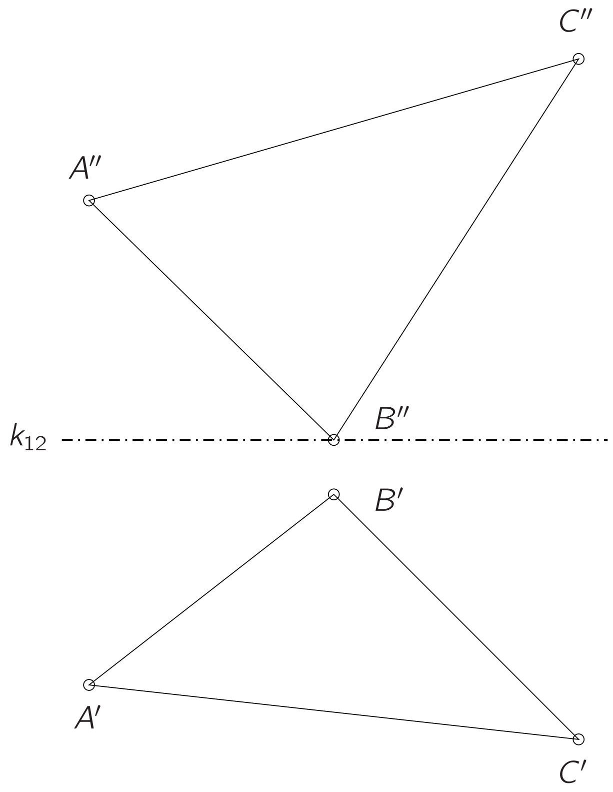


Abbildung 3.29: Wahre Gestalt eines Dreiecks

3.5.4 Lot auf eine Ebene (s. LEO S.105)

Eine nützliche Tatsache ist: Die Orthogonalprojektion eines rechten Winkels ist genau dann wieder ein rechter Winkel, wenn einer der beiden Schenkel parallel zur Bildebene liegt.

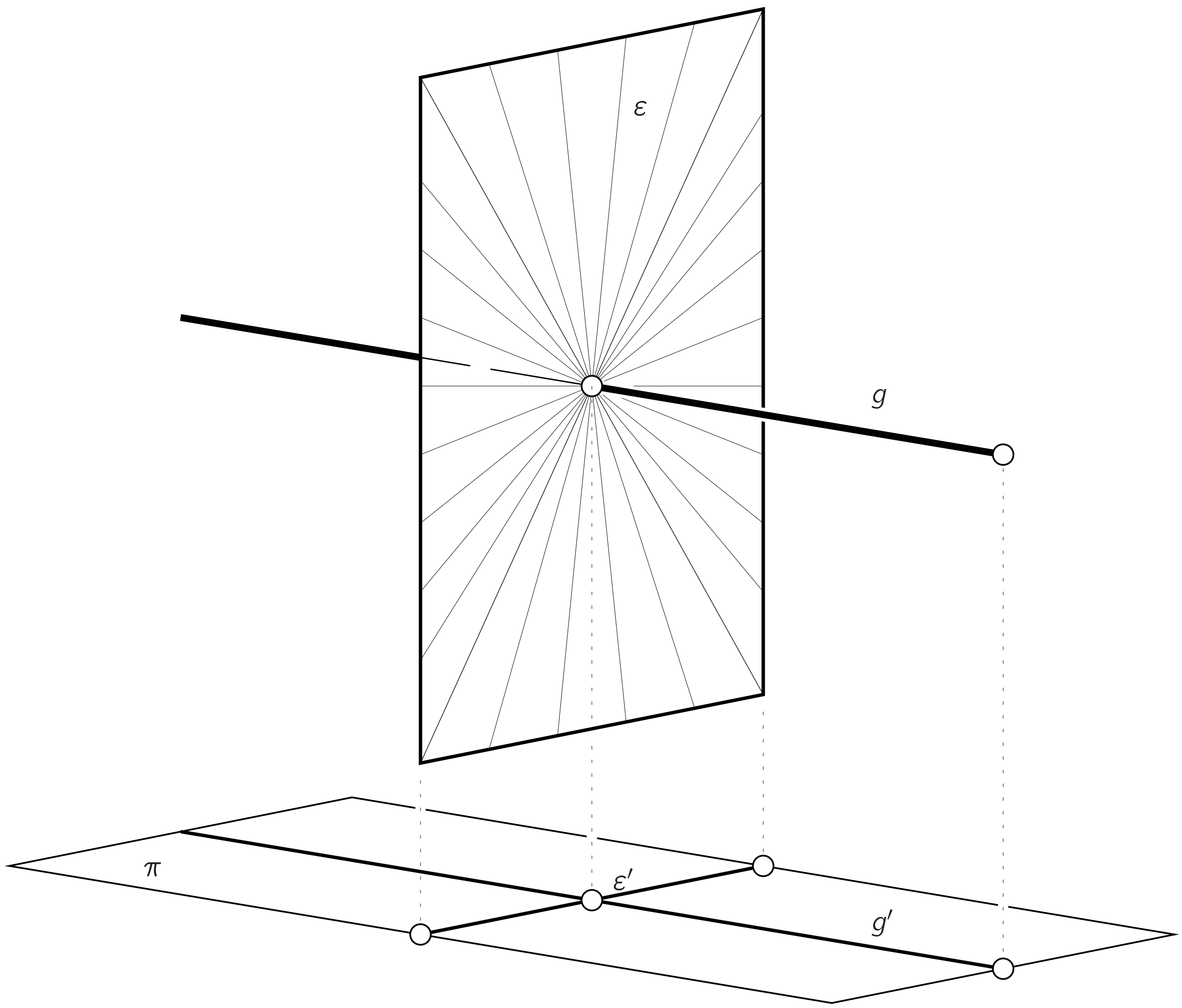


Abbildung 3.30: Orthogonalprojektion eines rechten Winkels

Beispielsweise sind Höhenlinien parallel zu π_1 und daher erscheint im Grundriss jeder rechte Winkel mit einer Höhenlinie ebenfalls als rechter Winkel. Entsprechendes gilt für Frontlinien im Aufriss. Diese Tatsache liefert die Idee zur Bestimmung von Loten auf Ebenen.

Gegeben: Ebene ε durch drei Punkte A, B, C und Punkt P.
Gesucht: Lot l auf ε durch P (d.h. finde $l \perp \varepsilon$ mit $P \in l$).

Durchführung:

(1) Zeichne die Höhenlinie h und die Frontlinie f von ε durch (z.B.) C in Grund- und Aufriss.

(2) Das Lot von P' auf h' ist der Grundriss l' und das Lot von P'' auf f'' ist der Aufriss l'' des Lotes l von P auf ε.

Aufgabe 3.16 *a) Bestimme den Fußpunkt Q des Lotes vom Punkt P auf die durch ein Dreieck bestimmte Ebene (Abb. 3.31, links).*

b) Gegeben sei die Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ (Abb. 3.31 rechts).
Gesucht sind die Höhen- und Frontlinie der Lotebene μ zu g durch P.

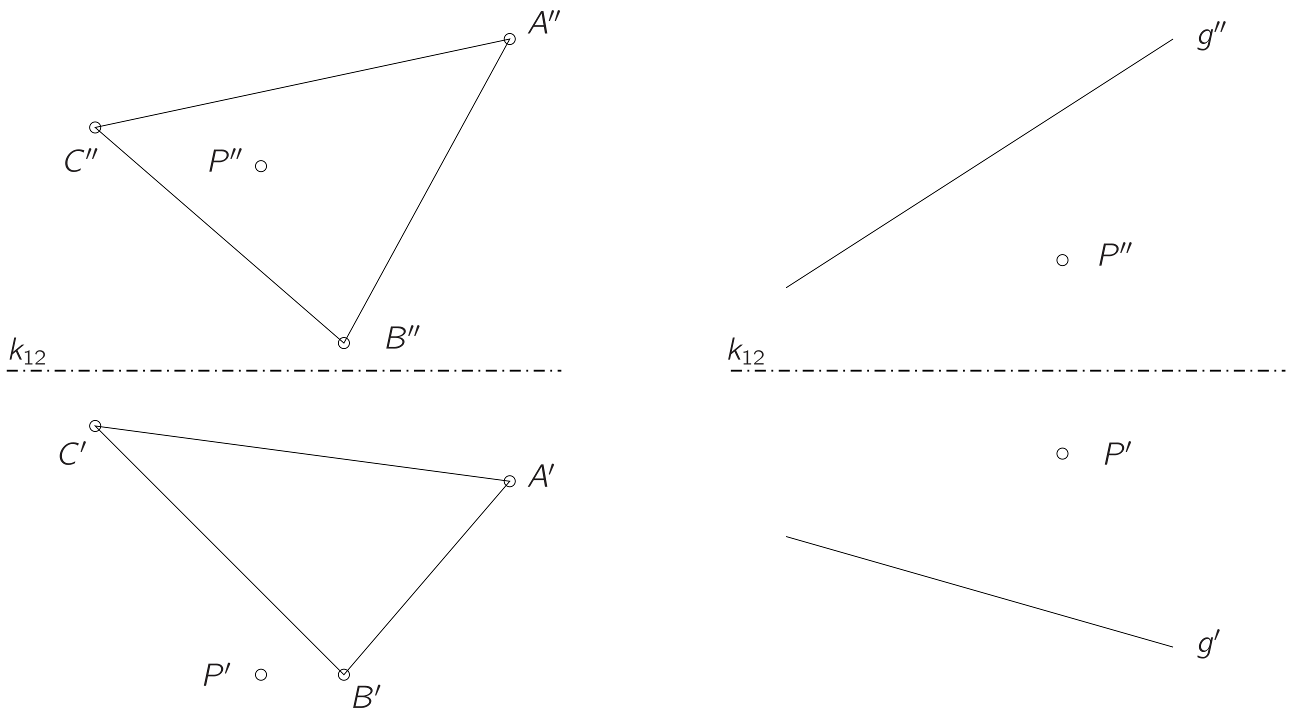


Abbildung 3.31: Lot auf Ebene bzw. Lotebene

3.6 Einschneideverfahren und senkrechte Parallelprojektion

(s. LEO S.199,204,208)

Wir wollen nun klären, wie man die Richtungen zu wählen hat, wenn das Ergebnis des Einschneideverfahrens einer senkrechten Parallelprojektion entsprechen soll. Wir hatten ja bereits mehrfach erwähnt, dass genau in diesem Fall das Einschneiden günstige Bilder ergibt.

Wir nehmen an, dass die senkrechte Parallelprojektion einer Projektionsrichtung entspricht, die allgemein in dem Sinn ist, dass sie nicht in einer Koordinatenebene liegt. Gerade solche Richtungen entsprechen den gewünschten anschaulichen Bildern. Dies bedeutet, dass die Bildebene (senkrecht zur Projektionsrichtung) tatsächlich ein *Spurdreieck* S_x, S_y, S_z aus den Koordinatenebenen herausschneidet, siehe Fig. 3.32.

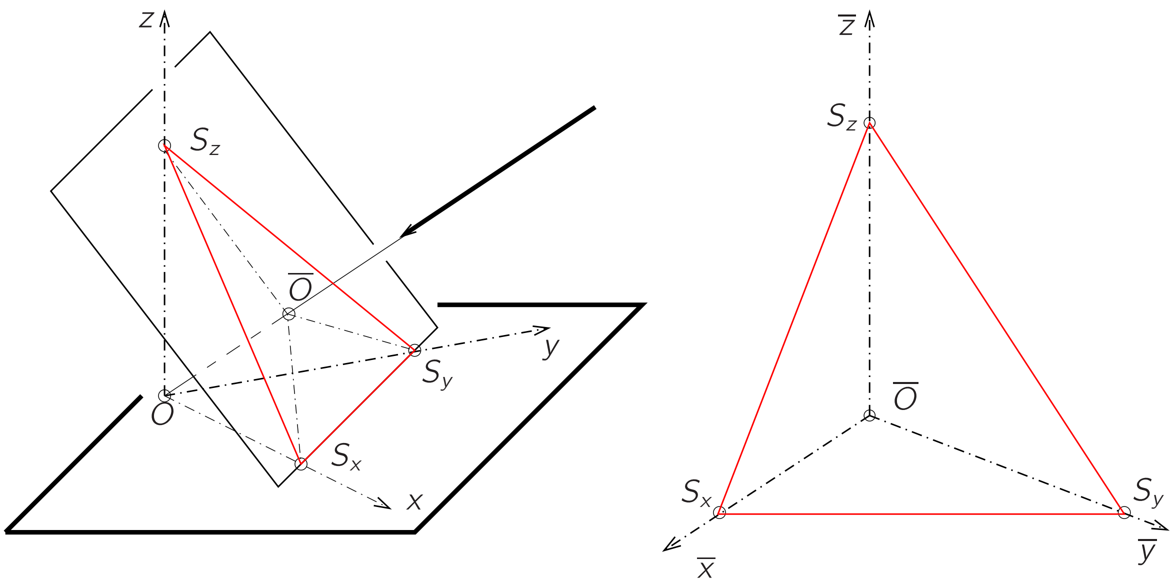


Abbildung 3.32: Senkrechte Axonometrie: Spurdreieck

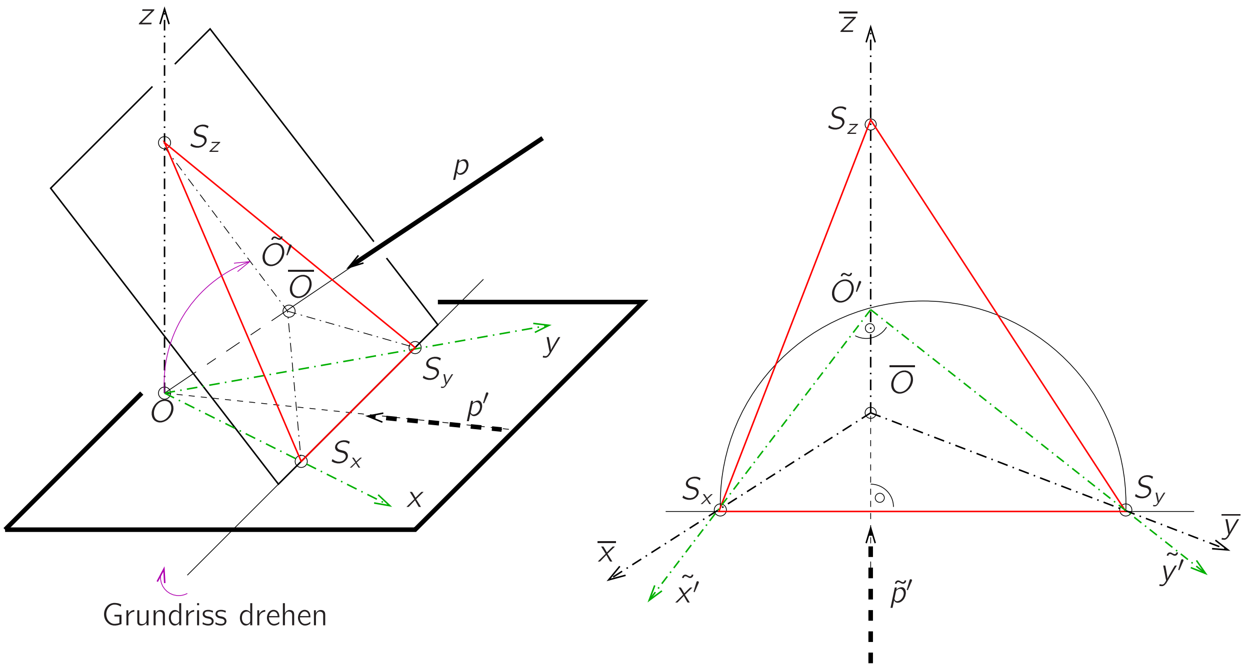


Abbildung 3.33: Senkrechte Axonometrie: Grundriss in die Bildtafel drehen

Um festzustellen, welcher Lage und Richtung des Grundrisses zu unserer senkrechten Parallelprojektion führen würde, drehen wir den Grundriss um die Grundrissspur in die Bildebene (Fig. 3.33).
Aus dem rechten Bild von Fig. 3.33 erkennen wir

- wie wir den Grundriss in die Zeichenebene legen müssen und in welche Richtung wir einschneiden müssen (senkrecht zur Grundrissspur).
- nach analogen Überlegungen für die Aufrisse:
  Das Bild $\overline{\mathbf{O}}$ des Kooridnatenursprungs ist der **Schnittpunkt der Höhen** des Spurdreiecks und die Höhen sind die Bilder der Koordinatenachsen.

Es gibt nun **drei Möglichkeiten**, die Orientierung für das Einschneideverfahren (bei senkrechter Axonometrie) vorzugeben:

a) Man legt das **Spurdreieck** S_x, S_y, S_z (im Einschneidebild) fest. Dann sind die Höhen des Spurdreiecks die Bilder der Koordinatenachsen und der Höhenschnittpunkt ist $\overline{O}$.
   Den Nullpunkt des Grundrisses findet man über den Thaleskreis (s. Fig. 3.33). Durch Herausziehen des umgeklappten Grundrisses in Richtung $\tilde{p}'$ liegt die Position und die Einschneiderichtung für den Grundriss fest. Analog verfährt man mit einem der Aufrisse.

b) Man legt das Bild des **Koordinatendreibein**s fest, wählt irgendeinen Punkt der x-Achse als **Spurpunkt** S_x und ergänzt S_y, S_z so, dass die Koordinatenbilder die Höhen des Spurdreiecks sind. Der Rest verläuft wie in a).

c) Man legt in Grund– und Aufriss die **Projektionsrichtung** fest und wählt (z.B.) den **Spurpunkt** S_x. Die Grundrissspur muss senkrecht zum Grundriss der Projektionsrichtung sein (s. Fig.3.34). Damit findet man S_y im Grundriss und Aufriss. Die Aufrissspur muss senkrecht zum Aufriss der Projektionsrichtung sein. Damit findet man S_z. Also sind von dem Spurdreieck die Seiten S_xS_y, S_yS_z und der Höhenfußpunkt auf der Seite S_xS_y bekannt (s. Fig. 3.34). Mit der Länge von S_yS_z lässt sich S_z im Einschneidebild zeichnen. Der Rest verläuft wie bei a). Statt der Höhe auf S_xS_y kann man auch die wahre Länge von S_xS_z verwenden (sie muss zuerst bestimmt werden !).

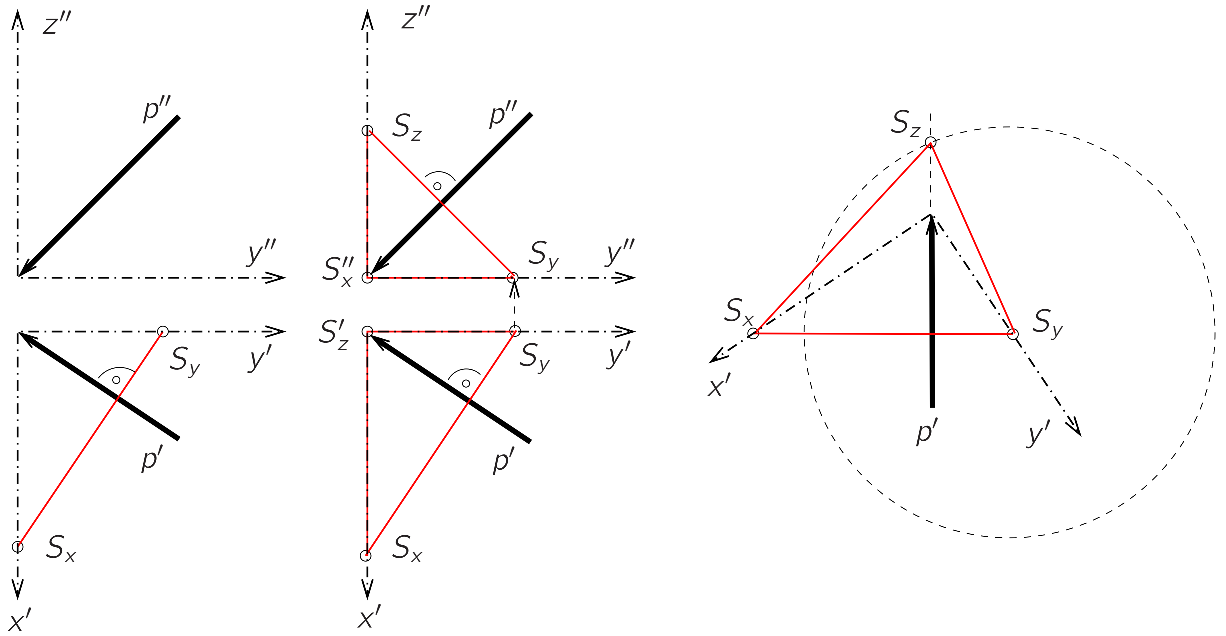


Abbildung 3.34: Konstruktion des Spurdreiecks aus der Projektionsrichtung

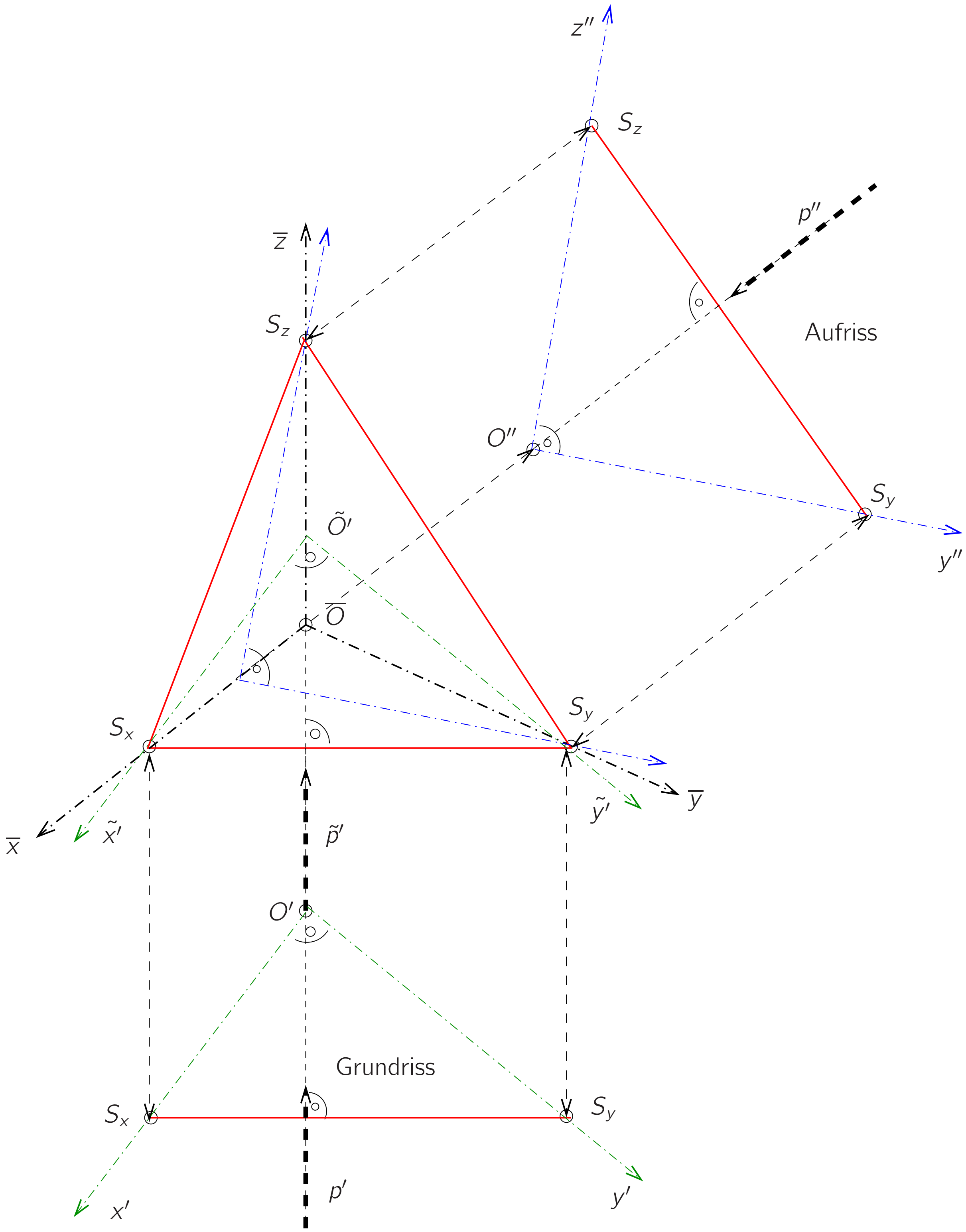


Abbildung 3.35: Senkrechte Axonometrie: Einschneideverfahren

Mögliche Vorgaben:

- Das **Spurdreieck** ist gegeben oder
- die Bilder der **Koordinatenachsen** sind gegeben oder
- die **Projektionsrichtung** ist in Grund– und Aufriss gegeben.

Aufgabe 3.17 *Gegeben: Grund– und Aufriss eines "halben" Würfels und die Bilder der Koordinatenachsen. Gesucht: Ein anschauliches Bild in senkrechter Axonometrie mit Hilfe des Einschneideverfahrens. Gib die Projektionsrichtung in Grund– und Aufriss an.*

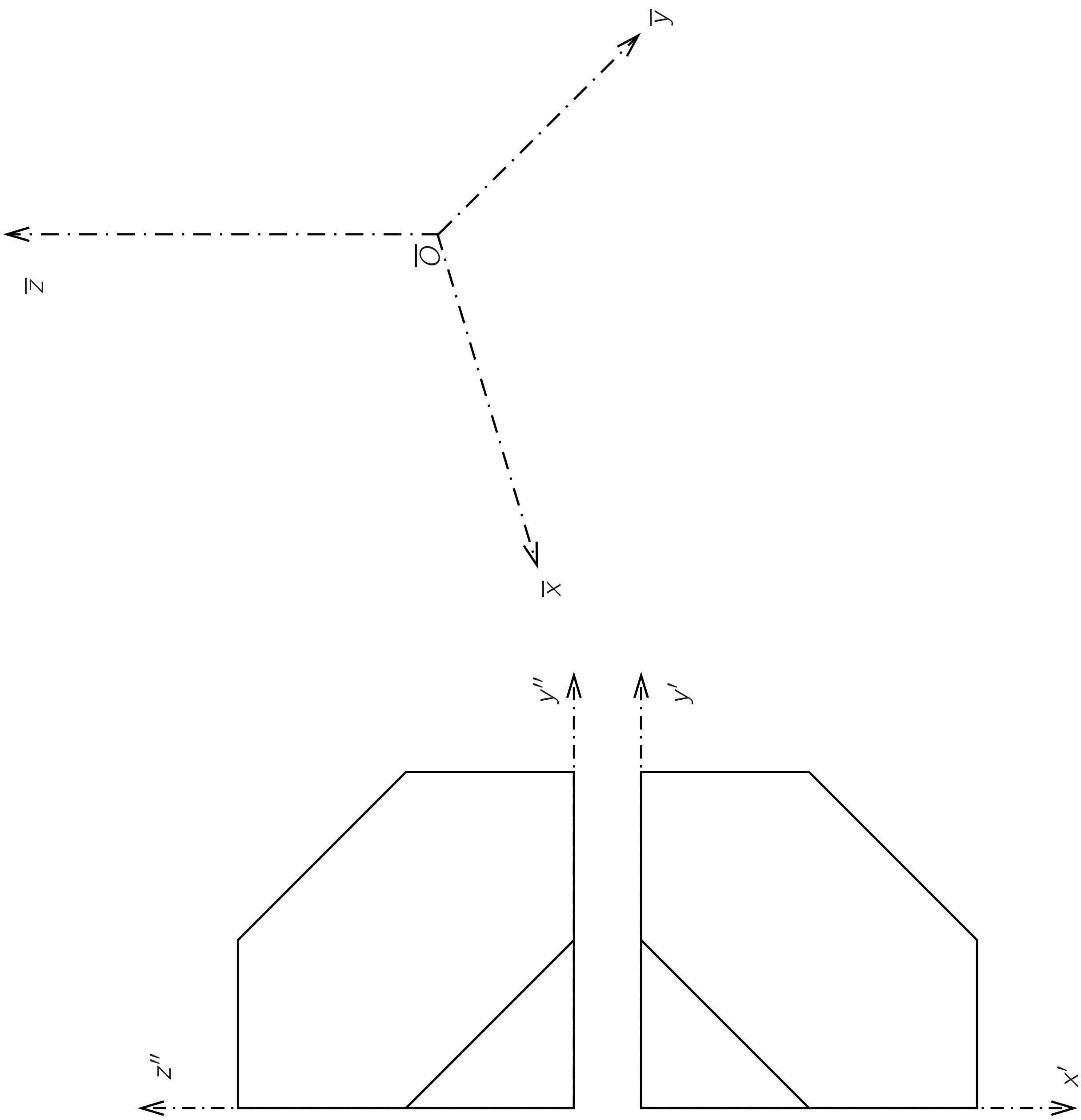


Abbildung 3.36: Senkrechte Axonometrie: Beispiel "halber" Würfel

Aufgabe 3.18 *Gegeben: Grund– und Aufriss eines Hauses und die Projektionsrichtung für eine senkrechte Axonometrie.*
Gesucht: Das zugehörige senkrechte axonometrische Bild mit Hilfe des Einschneideverfahrens.

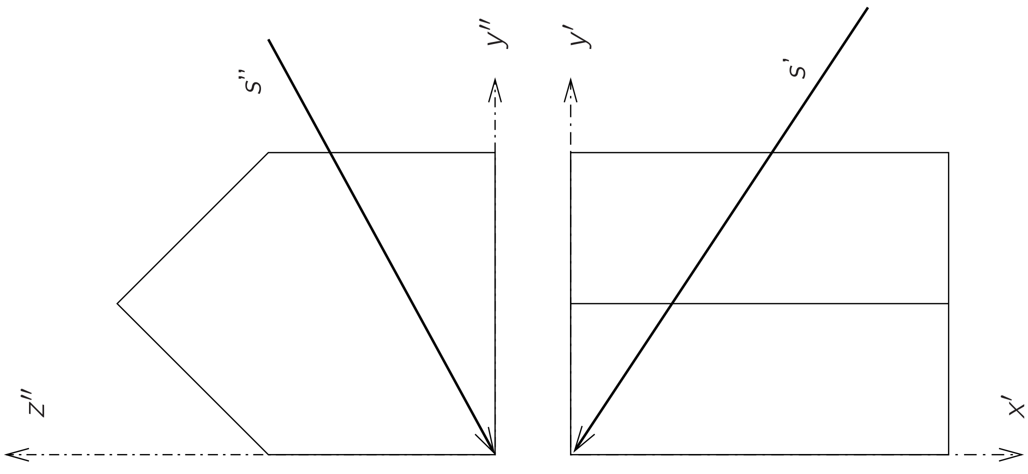


Abbildung 3.37: Senkrechte Axonometrie: Haus mit vorg. Projektionsrichtung

3.7 Dachausmittelung

(s. LEO S.195,197)

Ein Dach besteht i.A. aus ebenen geradlinig begrenzten Flächenstücken. Wir nehmen an, dass die unteren Begrenzungsstrecken, die **Traufkanten**, horizontal sind und auf **gleicher Höhe** liegen. Wir nennen zwei sich auf der Traufkante schneidende Dachflächen *benachbart*. Eine Schnittgerade benachbarter Dachebenen heißt **Grat-** oder **Kehllinie**, je nachdem ob sie von einer “ausspringenden” oder “einspringenden” Ecke der Traufe ausgeht. Die Schnittgerade zweier nicht benachbarter Dachebenen heißt **First**.

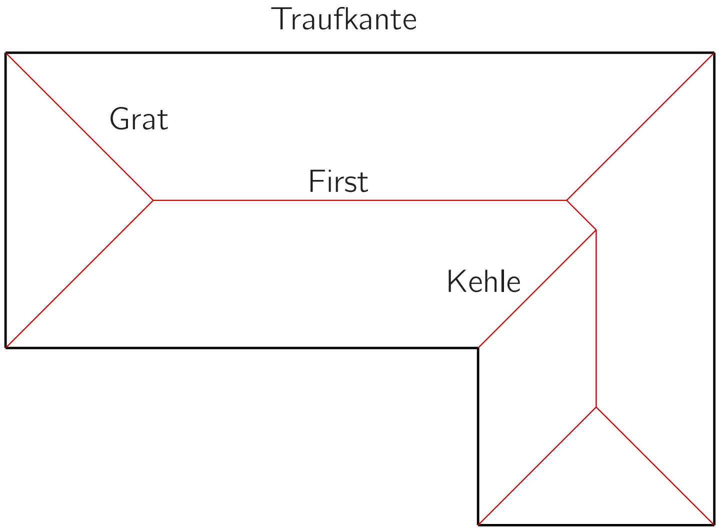


Abbildung 3.38: First, Grat- und Kehllinien eines Daches (Dachausmittelung)

Die **Aufgabe** der Dachausmittelung besteht darin, First, Grat- und Kehllinien sowie die wahre Gestalt der einzelnen Dachflächen zu bestimmen.

Lösungsprinzip:

Eine horizontale Hilfsebene ε wird in geeigneter Höhe durch das Dach gelegt. ε schneidet das Dach in Höhenlinien. Die Höhenlinien schneiden sich in Grat- und Kehllinien. Und Grat- und Kehllinien schneiden sich in Firstlinien.

Durchführung:

(1) Wähle die Höhe der Ebene ε so, dass die Höhenlinien im Grundriss einen Abstand von wenigstens 1-2 cm von der Traufkante haben.
Bei *gleicher Dachneigung* haben Höhenlinien überall den gleichen Abstand von der Traufkante !

(2) Zeichne die Höhenlinien für jede Dachebene in den Grundriss.

(3) Schneide die Höhenlinien benachbarter Dachflächen und verbinde die Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Traufpolygons. Dadurch erhält man die Grat- und Kehllinien.
Bei *gleicher Dachneigung* sind Grat– und Kehllinien Winkelhalbierenden der zugehörigen Traufkanten !

(4) Schnitt von „entsprechenden“ Grat- oder Kehllinien ergeben Punkte von Firstlinien.

(5) Fehlende Firstlinien ergeben sich, indem man die entsprechenden (nicht benachbarten) Dachebenen (mit Hilfe der Höhenlinien) schneidet.

(6) Die wahre Gestalt einer bestimmten Dachfläche erhält man durch Drehen der Ebene um die Traufkante in die Zeichenebene.

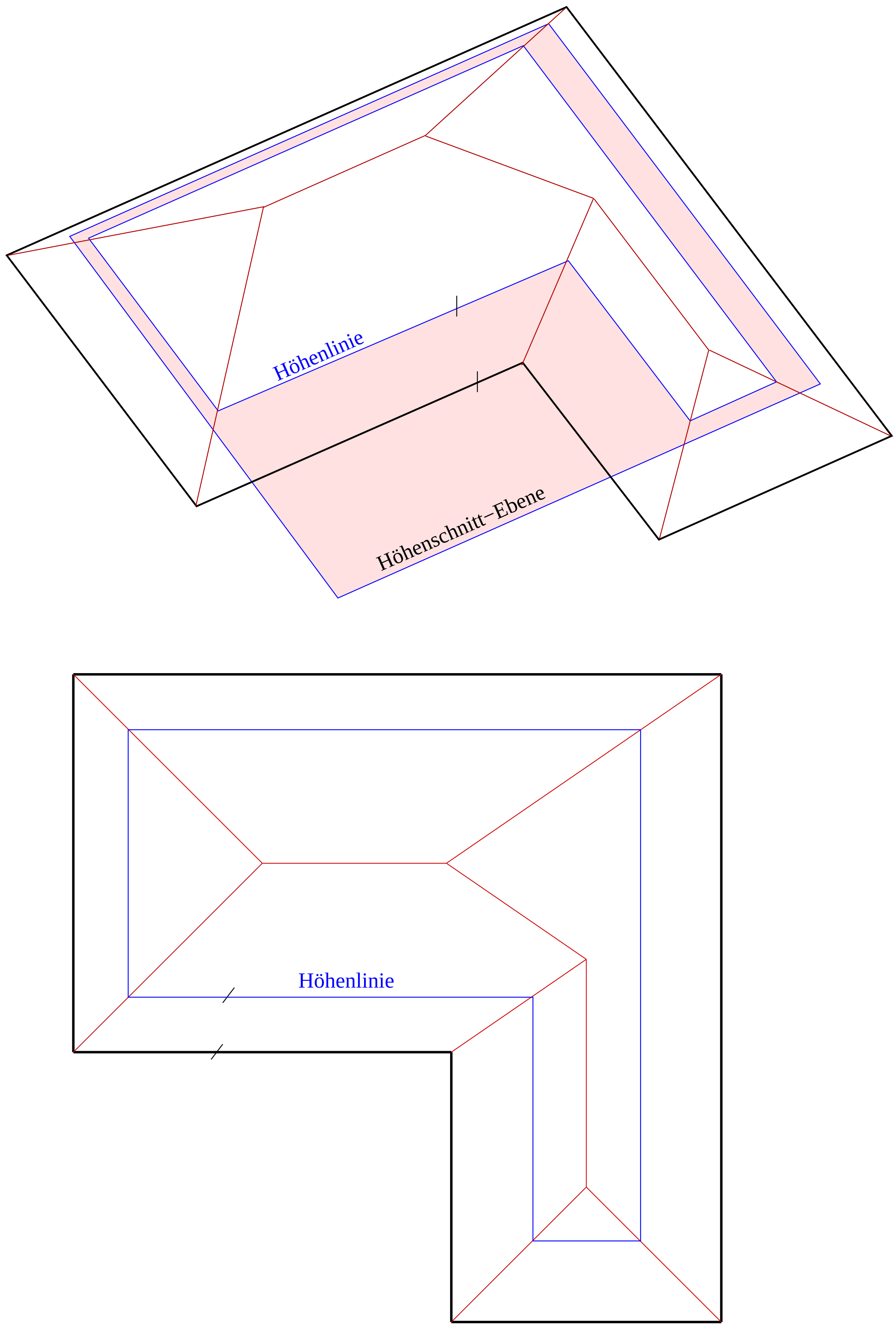


Abbildung 3.39: Höhenschnitt und Höhenlinien

Aufgabe 3.19 :

Gegeben: *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen α, β (Abb. 3.40).*

Gesucht: *a) Grat-, First- und Kehllinien,*

b) die wahre Gestalt der Dachfläche, die an der Traufkante $\overline{AB}$ anliegt.

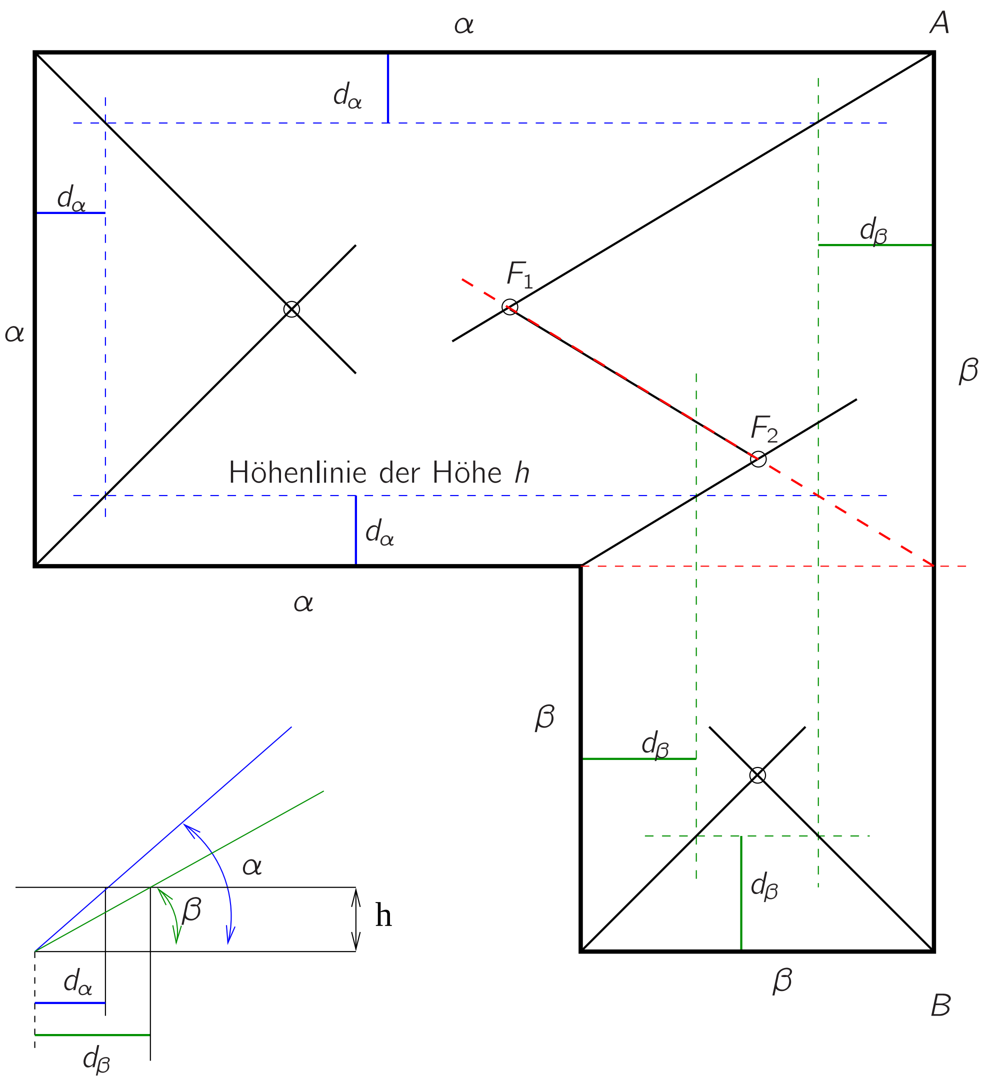


Abbildung 3.40: Grat– und Kehllinien zu Aufgabe 3.19

Beachte die Konstruktion der Strecke F_1F_2 als Grat zweier **nicht benachbarter** Dachflächen!

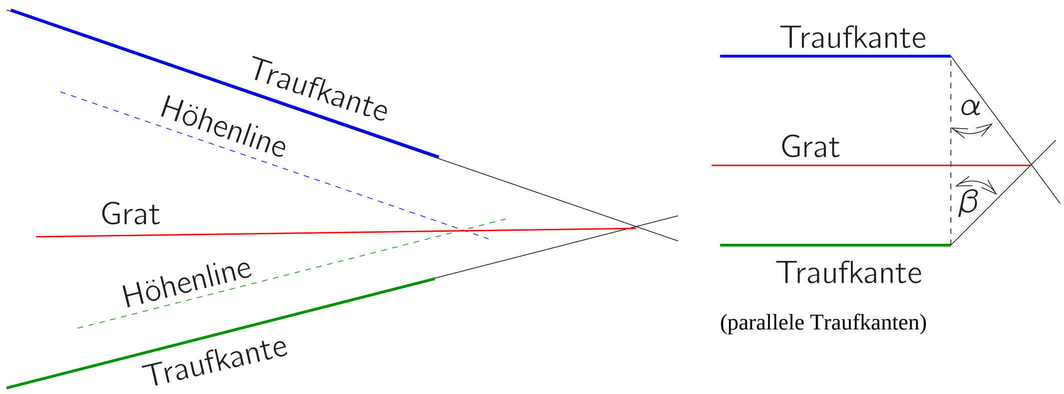


Abbildung 3.41: Konstruktionsprinzip einer Grat/Kehl–linie

Aufgabe 3.20 :

Gegeben: *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen* $\alpha = 30^\circ,\ \beta = 40^\circ,\ \gamma = 50^\circ$ *(Abb. 3.42).*

Gesucht: *Grat–, First– und Kehllinien.*

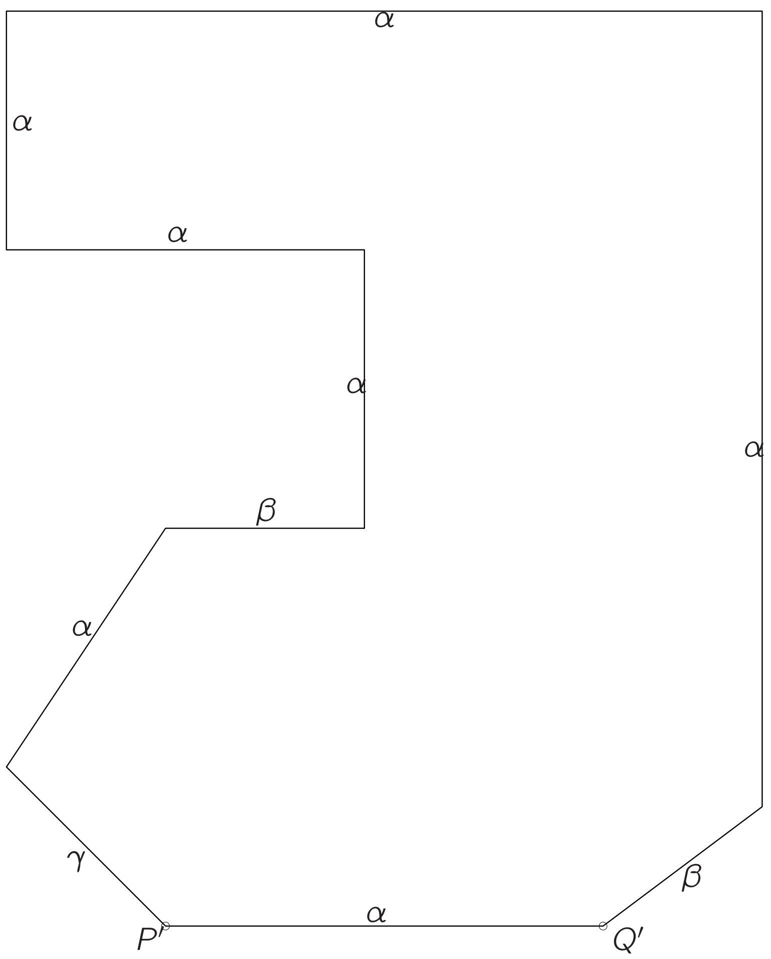


Abbildung 3.42: Aufgabe 2 zur Dachausmittelung

Kapitel 4

Gekrümmte Flächen in Parallelprojektion

Während wir bisher die Projektion ebener Flächen behandelt haben, widmen wir uns nun gekrümmten Flächen. Rotationsflächen, Regelflächen und Rohrflächen sind spezielle Beispiele dafür, die jeweils auf eine bestimmte Art aus Kurven erzeugt werden. Abwickelbare Flächen sind solche, die sich aus ebenem (ungekrümmten) Material herstellen lassen.
Für all diese Flächen ist die einfachste gekrümmte Kurve, der Kreis, wichtig, beziehungsweise seine Parallelprojektion, der Ellipse; daher beginnen wir das Kapitel mit diesen Kurven.
Wir kommen dann zu Böschungsflächen, also Flächen mit einer konstanten Neigung. Wie ihr Name andeutet, sind sie im Straßenbau wichtig. Hierzu führen wir die von Karten bekannte kotierte Projektion ein, bei der ein Grundriss mit Höhenlinien versehen wird.
Abschließend befassen wir uns damit, wie sich zwei Flächen durchschneiden. Die Aufgabe, die Durchschnittskurve festzustellen, trainiert besonders gut das räumliche Vorstellungsvermögen.

4.1 Gekrümmte Kurven: Kreis und Ellipse (s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem lässt sich ein **Kreis** mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r durch die
Gleichung: $x^2 + y^2 = r^2$ oder durch die
Parameterdarstellung: $x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ beschreiben.

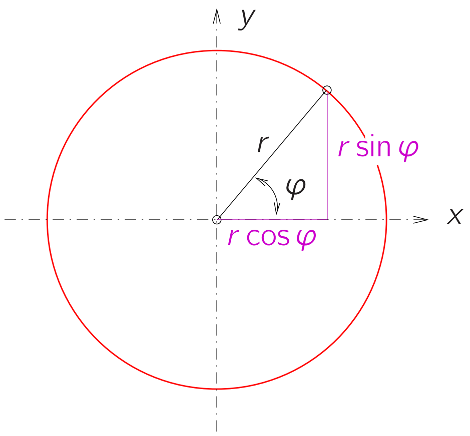


Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Ellipse zu definieren. Wir wollen hier die folgende Definition wählen:

Eine ebene Kurve k, die sich in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a, b > 0$$

beschreiben lässt, ist eine **Ellipse** mit **Mittelpunkt** $(0, 0)$ und den **Halbachsen** a, b. Für $a = b$ erhält man einen Kreis.

Die Strecke zweier Ellipsenpunkte heißt **Sehne** der Ellipse.

Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt **Durchmesser** der Ellipse.

Die Punkte $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ sind die **Scheitel** der Ellipse.

Im Fall $a \neq b$ sind die x-Achse und die y-Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h., nur die Spiegelungen an x- und y-Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Die Durchmesser auf den Symmetrieachsen heißen die **Hauptachsen** der Ellipse.

Die **Parameterdarstellung** der Ellipse k ist: $\quad x = a\cos\varphi\ ,\ y = b\sin\varphi \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ .$

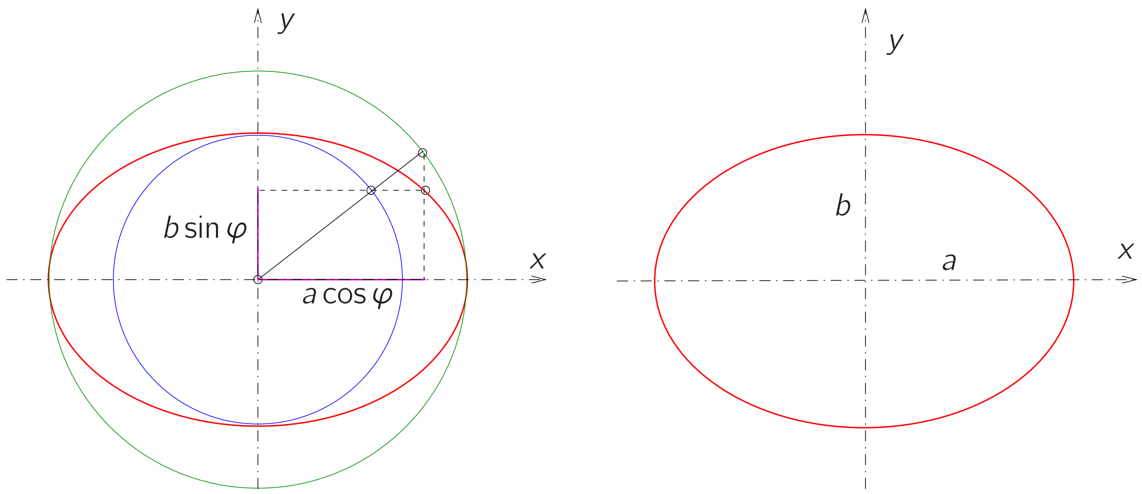


Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

4.1.1 Ellipsenkonstruktionen

a) **Scheitelkreiskonstruktion.**

Aus der Parameterdarstellung der Ellipse erkennt man, dass der Ellipsenpunkt $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ dieselbe x-Koordinate wie der Punkt $(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)$ des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ und dieselbe y-Koordinate wie der Punkt $(b\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2 = b^2$ zum Parameter φ hat. Die beiden Kreise $x^2+y^2 = a^2$ und $x^2+y^2 = b^2$ heißen die **Scheitelkreise** der obigen Ellipse.

Daher kann man Ellipsenpunkte konstruieren, indem man die y-Koordinate eines Punktes des großen Scheitelkreises mit dem Faktor b/a staucht (bzw. die x-Koordinate des kleinen Scheitelkreises mit dem Faktor a/b streckt):

Voraussetzung: Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Zeichne die beiden Scheitelkreise der Ellipse (s. Abb. 4.3, links).
(2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Ellipse.
(3) Der Strahl schneidet den kleinen (bzw. großen) Kreis in einem Punkt P (bzw. Q).
(4) Fälle das Lot von P (Q) auf die kleine (große) Achse. Der Schnittpunkt dieser Lote ist ein Punkt der Ellipse.

Eine Abbildung, die nur eine Koordinate streckt oder staucht, nennt man **Affinität**.

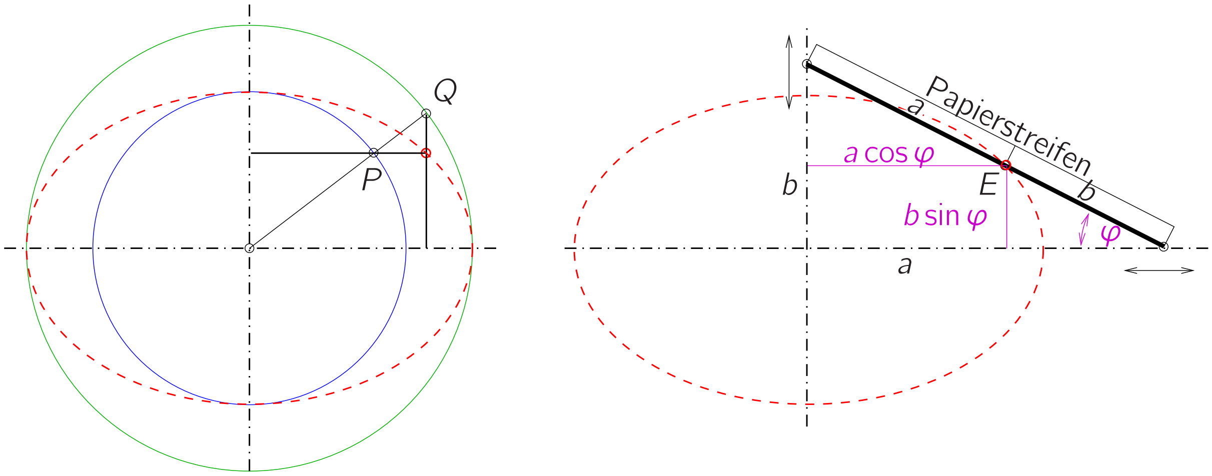


Abbildung 4.3: Konstruktion von Punkten einer Ellipse

b) **Papierstreifenmethode.** (Abb. 4.3, rechts) (s. LEO S.60)

Voraussetzung: Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Schneide einen Papierstreifen der Länge $a+b$ aus und markiere die Stelle, an denen die Strecken der Länge a und b zusammengesetzt sind, durch E.

(2) Gleitet der Papierstreifen wie in der Skizze (Abb. 4.3, rechts) auf den Achsen der Ellipse, so beschreibt der Punkt E in jeder Lage einen Ellipsenpunkt.

c) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.** (Abb. 4.4, links)

Voraussetzung: Die „Brennpunkte“ F_1 , F_2 und die große Halbachse a der Ellipse sind bekannt.

(1) Schneide einen Faden der Länge $2a$ zurecht.

(2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten F_1, F_2.

(3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.

(4) Für die Brennweite $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ gilt: $e^2 = a^2 - b^2$.

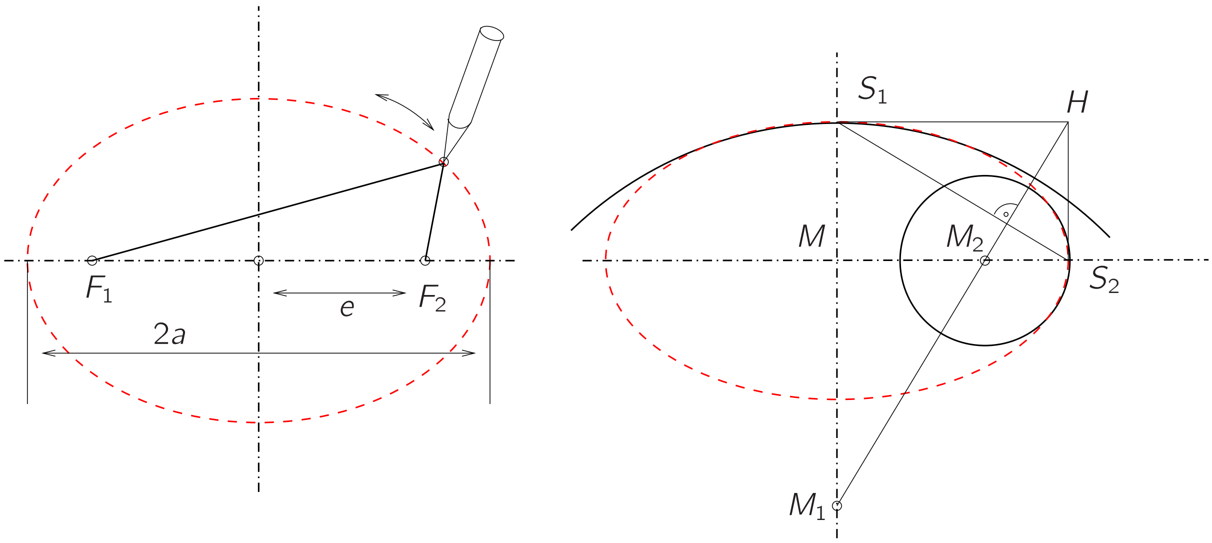


Abbildung 4.4: “Gärtnerkonstruktion” und Scheitel-Krümmungskreise einer Ellipse

d) **Scheitelkrümmungskreismethode.** (Abb. 4.4, rechts) (s. LEO S.64)

Die Methoden a), b), c) bestimmen Ellipsenpunkte exakt. Wir geben nun noch eine Näherungsmethode an: **Idee:** Man bestimmt Mittelpunkte und Radien der Krümmungskreise für die Scheiteln der Ellipse, zeichnet die Scheitelkrümmungskreise und nähert die Ellipse durch tangentiale Kurvenbögen an.

Voraussetzung: Mittelpunkt M und Scheitel sind bekannt.

(1) Wähle zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Scheitel S_1, S_2.
(2) Ergänze das rechtwinklige Dreieck M, S_1, S_2 durch den Punkt H zu einem Rechteck.
(3) Fälle das Lot von H auf die Gerade durch S_1, S_2.
(4) Die Schnittpunkte M_1, M_2 des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise für die Scheitel S_1, S_2.
(5) Zeichne die Scheitelkrümmungskreise in allen Scheiteln.
(6) Zeichne eine Kurve durch die Scheitel, die die Krümmungskreise von innen bzw. von außen berührt.

4.1.2 Parallelprojektion von Kreis und Ellipse

Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

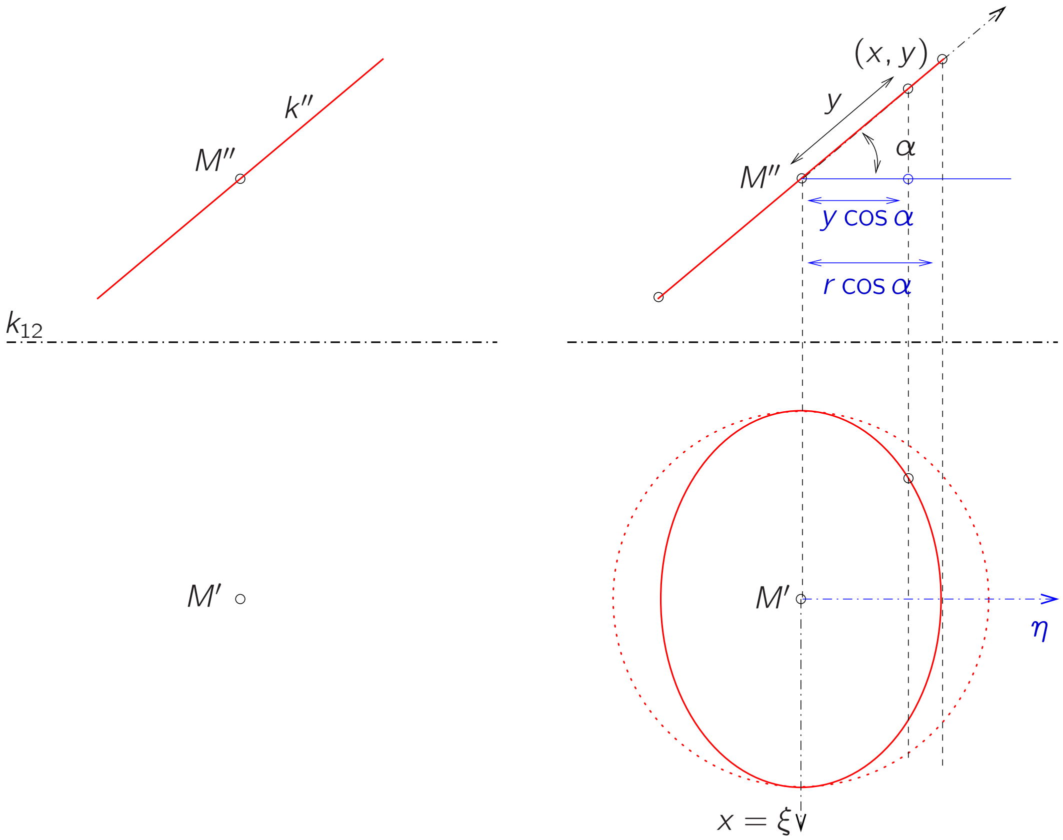


Abbildung 4.5: Projektion eines Kreises

Um unsere Behauptung einzusehen, betrachten wir die folgende Zweitafelprojektion eines Kreises in Abb. 4.5:
Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss k''.
Gesucht: Grundriss k' des Kreises.

Zur Lösung führen wir x-y-Koordinaten in der Kreisebene und ξ-η-Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.5, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2 + y^2 = r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt (x, y) der Kreisebene den Grundriss (ξ, η) mit $\xi = x$ und $\eta = y \cos\alpha$ hat. Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ gilt

$$\xi^2 + (\eta/\cos\alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2/r^2 + \eta^2/(r\cos\alpha)^2 = 1\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen r und $r\cos\alpha$.

Aufgabe 4.1 *Zeichne den Grundriss des obigen Kreises (Abb. 4.5, links) mit Hilfe der Schreitelkrümmungskreismethode.*

Wie sieht die Parallelprojektion einer Ellipse aus? Man kann zeigen, dass sie wiederum auf eine Ellipse oder eine Strecke führt. Dabei wird der Mittelpunkt auf den Mittelpunkt abgebildet. Allerdings sind die Bilder der Achsen nicht unbedingt die Achsen der Bildellipse. Dies erklärt sich daraus, dass rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden.

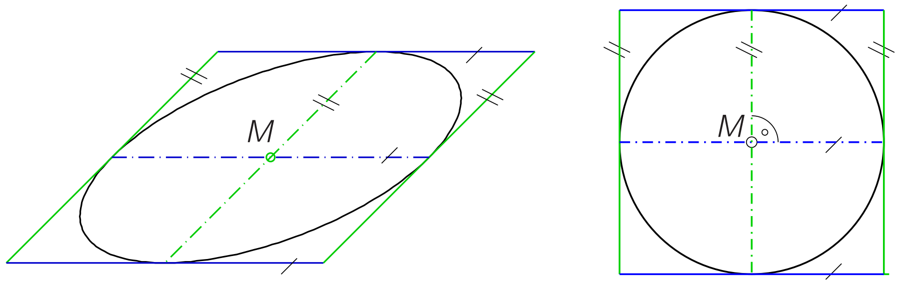


Abbildung 4.6: Parallelprojektion einer Ellipse

4.2 Zylinder und Kegel

(s. LEO S.137,140)

Durch Parallelverschieben einer Geraden g **(Erzeugende)** längs einer ebenen Kurve c **(Leitkurve)** entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** (Abb. 4.7 a)).

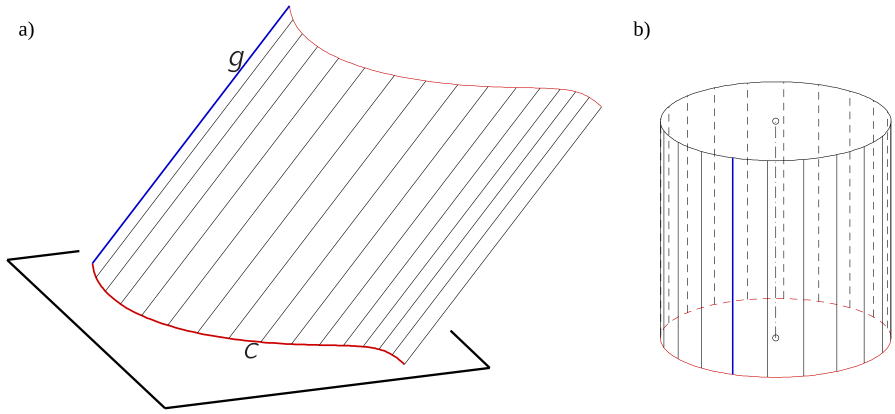


Abbildung 4.7: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszylinders

Ist c speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein **senkrechter Kreiszylinder** (Abb. 4.7 b)). Die Leitkurve heißt **Basiskreis**, die Erzeugenden heißen **Mantellinien**. Die Symmetriegerade a heißt **Achse**. Da der senkrechte Kreiszylinder auch durch Drehung einer Erzeugenden um die Achse a erzeugt werden kann, nennt man diese Fläche auch **Dreh-** oder **Rotationszylinder**.

Eine **Ebene schneidet** einen senkrechten Kreiszylinder in einem Kreis, in einer Ellipse, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.8).

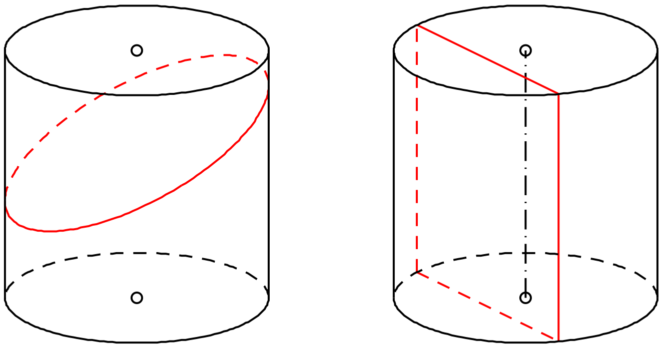


Abbildung 4.8: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders

Gleitet eine Gerade g auf einer ebenen Kurve c und geht g stets durch einen festen Punkt S (Kegel**scheitel** oder **-spitze**), so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche** (Abb. 4.9 a)).
Ist c speziell ein **Kreis** und liegt S auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt M, so entsteht ein **senkrechter Kreiskegel** (Abb. 4.9 b)). Die Gerade a durch M, S steht senkrecht auf der Kreisebene und heißt **Kegelachse**. Da der senkrechte Kreiskegel auch durch Rotation einer Geraden durch S um a erzeugt werden kann, nennt man ihn auch **Dreh-** oder **Rotationskegel**.

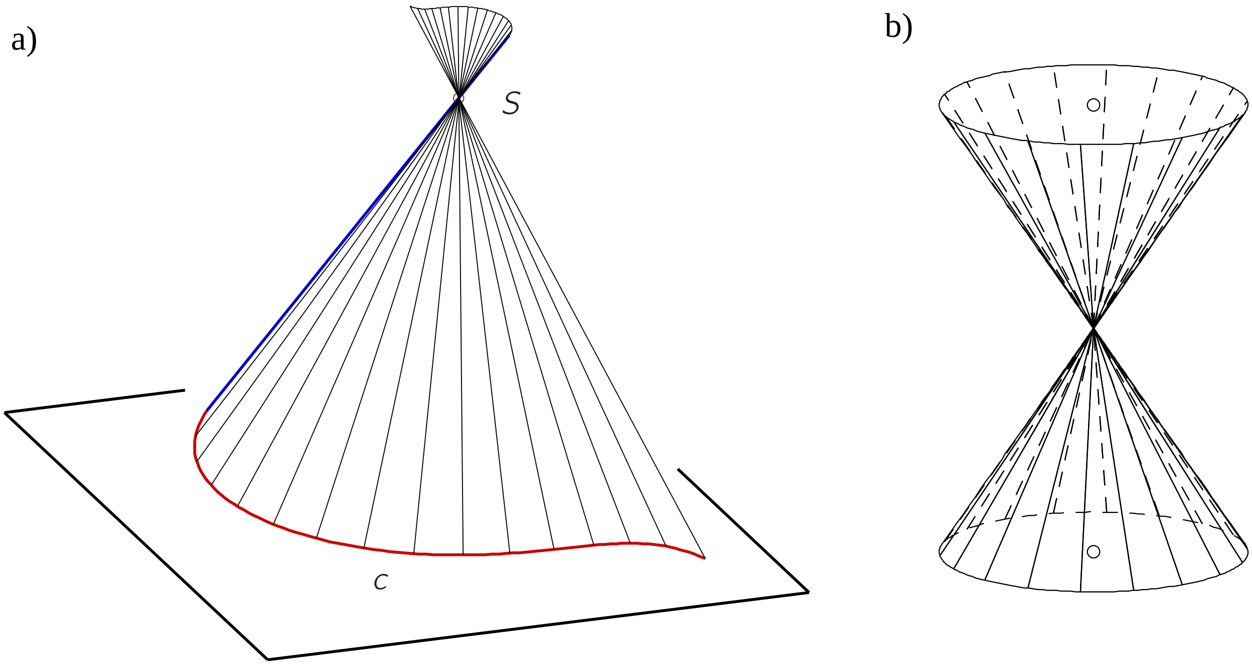


Abbildung 4.9: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Den Schnitt einer **Ebene** ε mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

Falls die Kegelspitze S nicht in der Ebene ε liegt, so sind, je nach Steilheit von ε, folgende Kegelschnitte möglich:

(a)	Kreis	($\varepsilon \perp a$)	(b)	Ellipse	(ε flacher als Mantellinie)
(c)	Parabel	($\varepsilon \parallel$ Mantellinie)	(d)	Hyperbel	(ε steiler als Mantellinie)

Ebenen durch S schneiden den Kegel in zwei, einer oder keiner Geraden.

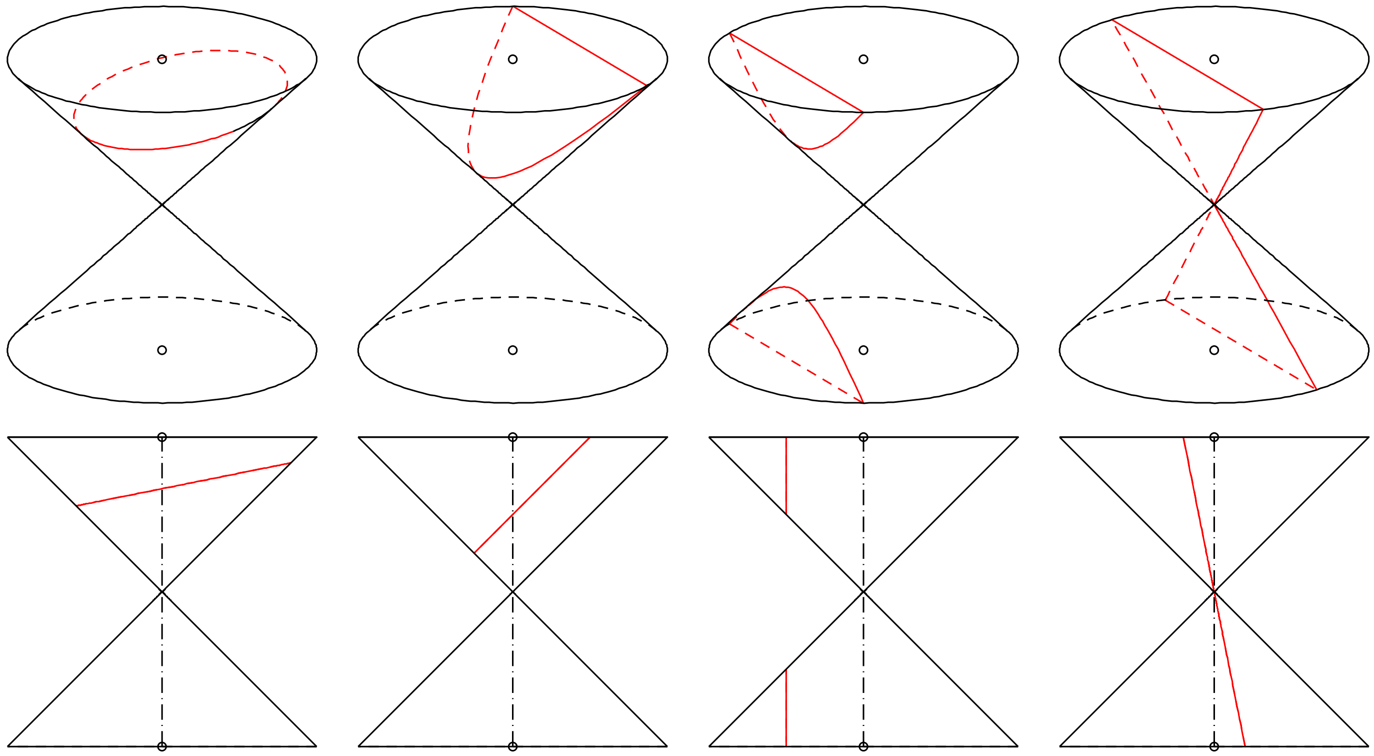


Abbildung 4.10: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geradenpaar

4.3 Rotations- und Regelflächen

Weil sie einfach hergestellt werden können, sind viele Körper **Rotationsflächen**. Mathematisch sind dies Flächen, die bei Drehung um eine Achse in sich selbst übergehen. Eine Rotationsfläche wird oft durch Drehung einer Kurve k um eine *Rotationsachse* a erzeugt. Jeder Punkt der Kurve k beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf a liegt und der senkrecht zu a steht.

Eine Ebene, die die Rotationsachse a enthält, schneidet aus der Rotationsfläche Φ eine (ebene) Kurve m aus, den **Meridian**. Alle Meridianschnitte sind kongruent. Ist die Achse einer Rotationsfläche parallel zu einer Risstafel, so ist der Umriss in dieser Risstafel ein Meridian (Hauptmeridian).
Zylinder und Kegel sind Beispiele von Rotationsflächen der Meridiankurven Geraden sind. Die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen weitere Beispiele.

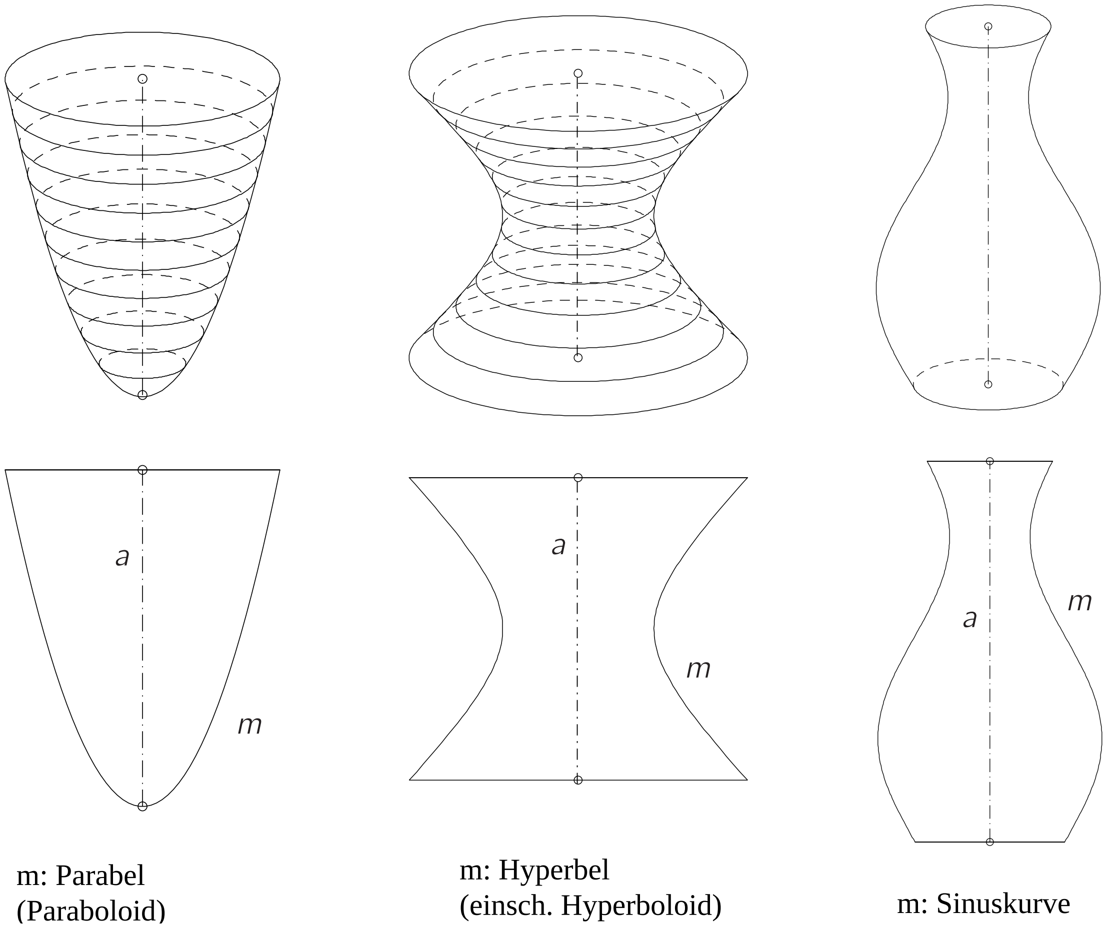


Abbildung 4.11: Rotationsflächen und ihre Meridiankurven

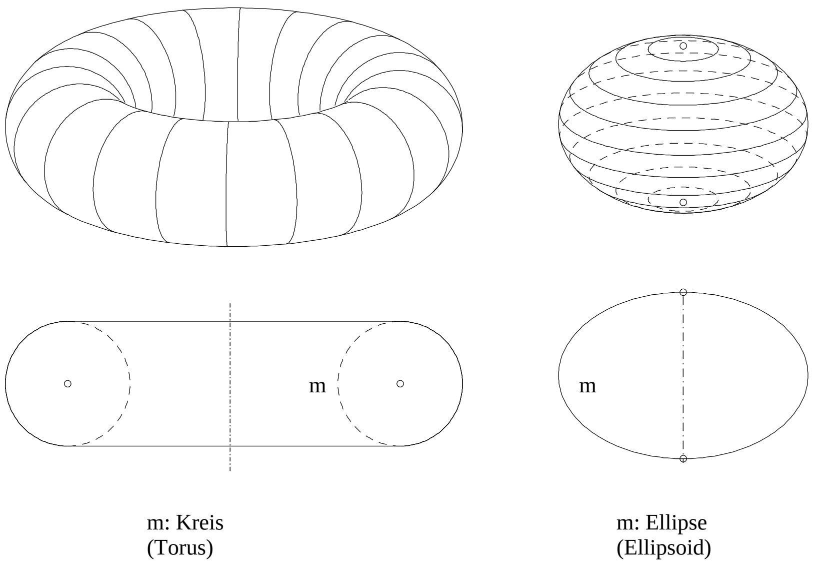


Abbildung 4.12: Torus und Rotationsellipsoid

Als **Regelfläche** wird eine Fläche bezeichnet, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Um ein anschauliches Bild einer Regelfläche zu erhalten, genügt es meistens, die erzeugende Gerade in “genügend” vielen Lagen zu zeichnen. Einfache Beispiele sind **Zylinder** und **Kegel**, nicht nur über dem Kreis, sondern auch in den allgemeinen Varianten.
Bei der **Wendelfläche** wird eine Gerade um eine dazu senkrechte Achse gedreht. Das Ergebnis kann man sich als eine (doppelte) Wendeltreppe vorstellen, siehe Abb. 4.13 links. Je nach Drehrichtung kann eine Wendelfläche eine Rechtsschraube oder Linksschraube darstellen; falls man gar nicht dreht, ergibt sich als Sonderfall eine Ebene. Im Falle einer Gerade, die nicht senkrecht auf der Achse steht, ergibt sich eine Fläche wie in Abb. 4.13 rechts.

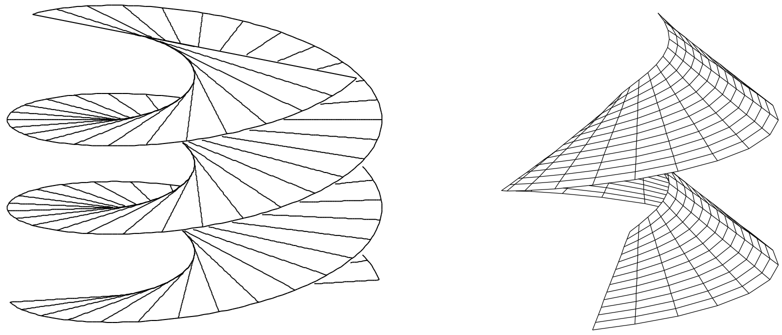


Abbildung 4.13: Wendelfläche (links), Verschraubung einer geneigten Geraden um eine Achse (rechts)

In der Praxis werden zwei spezielle Regelflächen gern verwendet:
a) Das **einschalige Hyperboloid** entsteht durch Rotation einer zur Achse windschiefen Geraden, siehe Abb. 4.14a). Das Hyperboloid enthält auch noch eine zweite Schar von Geraden, die beispielsweise durch Spiegelung der ersten Geraden entsteht.
b) Abb. 4.14b) zeigt ein **hyperbolisches Paraboloid**, das durch Bewegung einer Strecke mit Endpunkten auf zwei gegebenen Strecken entsteht.

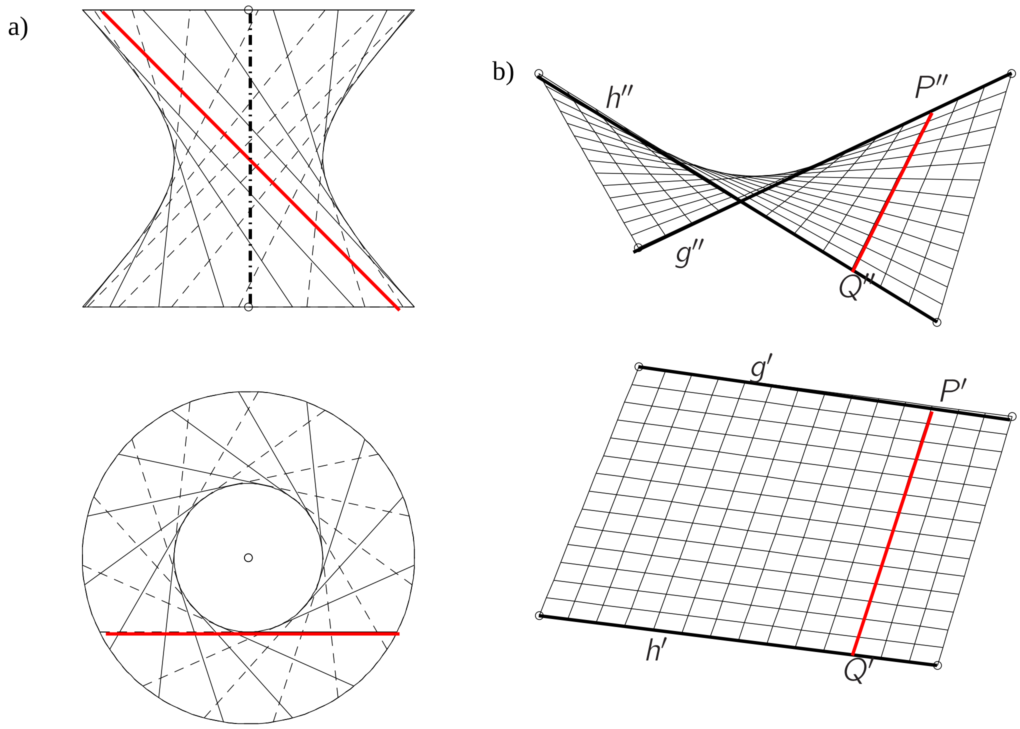


Abbildung 4.14: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

Aufgabe 4.2 *a) Gegeben ist in Grund– und Aufriss eine erzeugende Strecke und die Rotationsachse eines einschaligen Hyperboloids. Zeichnen Sie den Umriss in Grund– und Aufriss.*
b) Gegeben ist in Grund– und Aufriss das Randviereck eines hyperbolischen Paraboloids. Zeichnen Sie den Umriss.

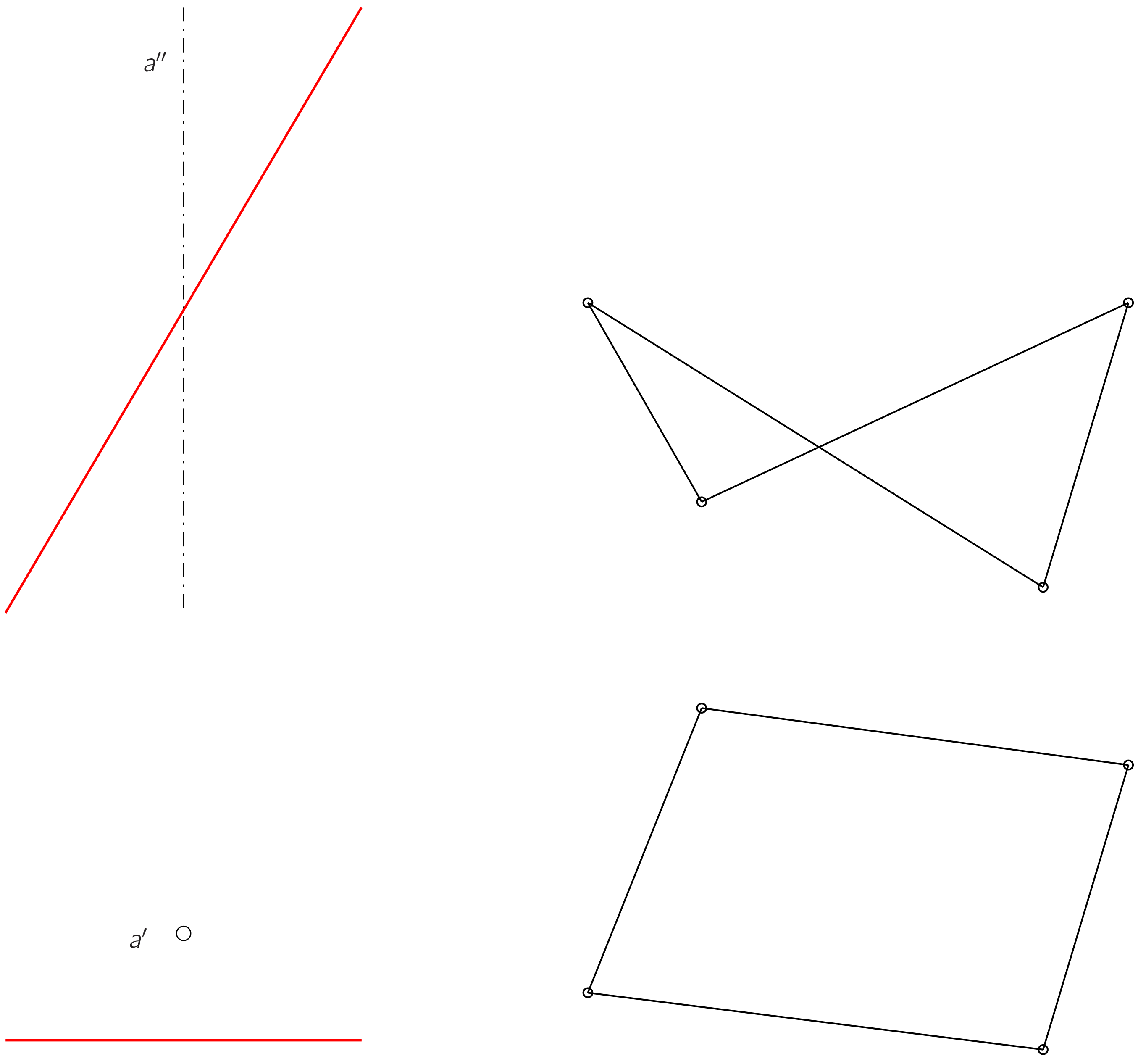


Abbildung 4.15: Regelflächen: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

4.4 Abwickelbare Flächen

(s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten.

Beispiele: a) Zylinder b) Kegel
c) die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte Fläche (Tangentialfläche).

4.4.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges n-Eck) an, „schneidet" das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

Durchführung: (Abb. 4.16)

(1) Teile den Basiskreis in n (≥ 12) Teile und zeichne das n-Eck.
(2) Nimm die Länge d einer Seite des n-Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe h (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.
(3) Der Punkt P liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von P zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante" k in die Abwicklung.
(4) Übertrage P in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes P ergibt sich aus dem Aufriss.

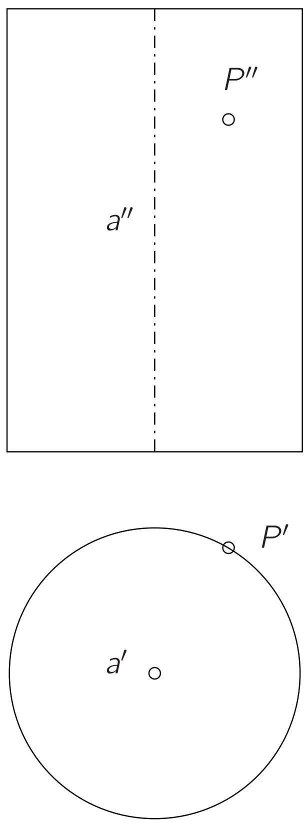


Abbildung 4.16: Abwicklung eines Zylinders

4.4.2 Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund– und Aufriss (Abb. 4.17).
Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Annäherung des Kegels durch eine n-kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes P erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke $\overline{SP}$ erhält man durch Paralleldrehen zu π_2.

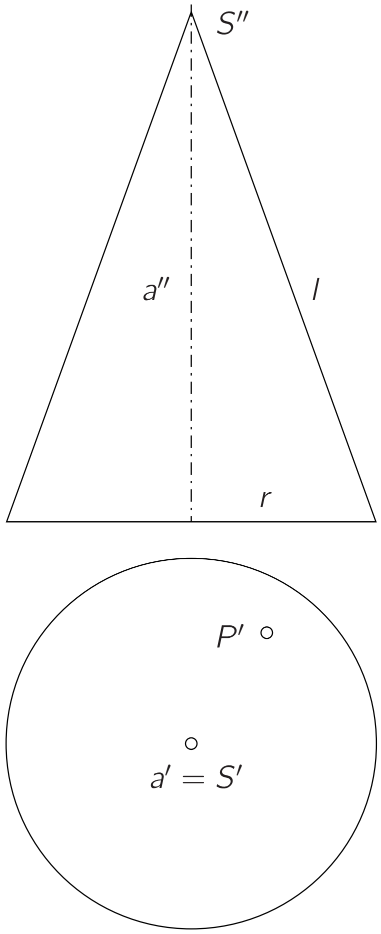
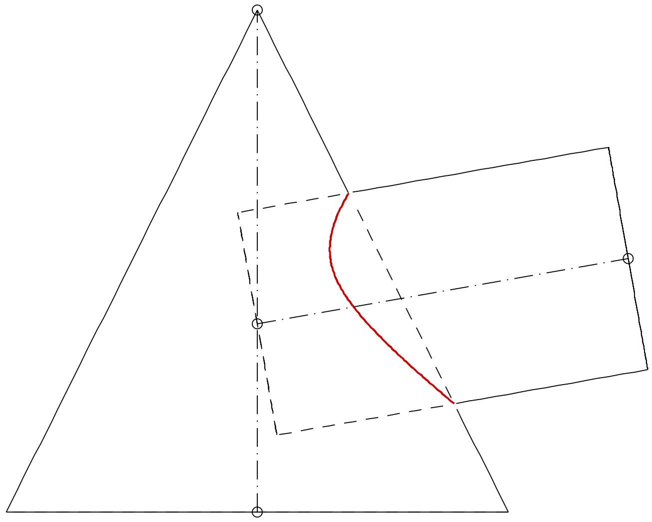


Abbildung 4.17: Abwicklung eines Kegels

Aufgabe 4.3 *Wickle Kegel- und Zylinderteil aus Abb. 4.29 (Durchdringung Kegel–Zylinder) ab, schneide die Abwicklungen aus und bastele ein Modell.*



Interessant sind auch **Auf**wicklungen:

Aufgabe 4.4 *Wickle das Plakat in Abb. 4.18 auf die Reklamesäule (Zylinder) auf.*

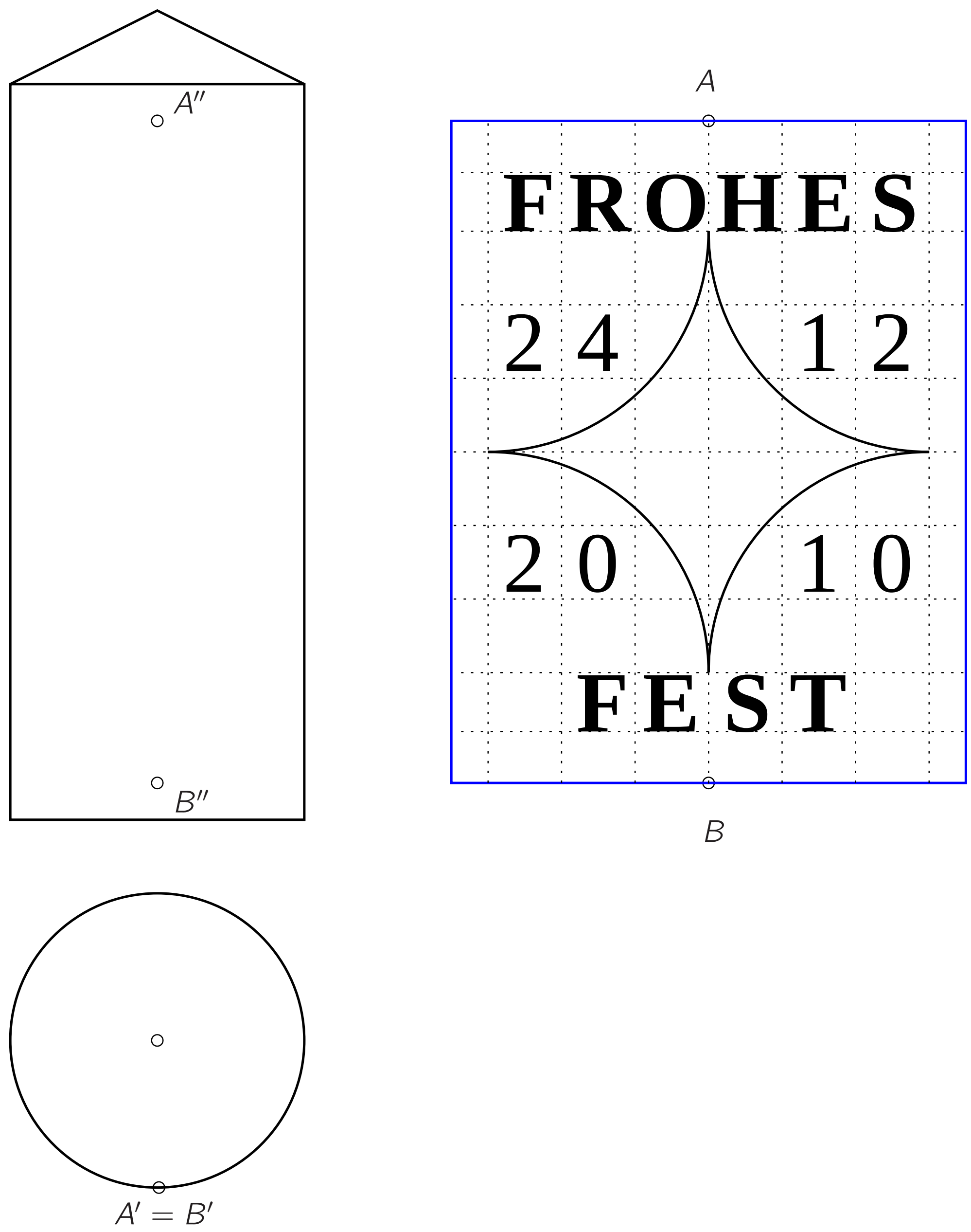


Abbildung 4.18: Aufwicklung auf einen Zylinder

4.5 Kotierte Projektionen

(s. LEO S.183)

Um im nächsten Abschnitt Böschungsflächen zu behandeln, wollen wir kurz eine aus der Kartographie und von Geländedarstellungen gut bekannte Projektionsform einführen: die **kotierte Projektion**. Dies ist ein Grundriss, in den man *Höhenlinien* projiziert und sie mit *Höhenangaben* (Kote) versieht, siehe Figur 4.19. Auf diese Weise reicht bereits eine Projektion, um ein Gelände zu beschreiben.

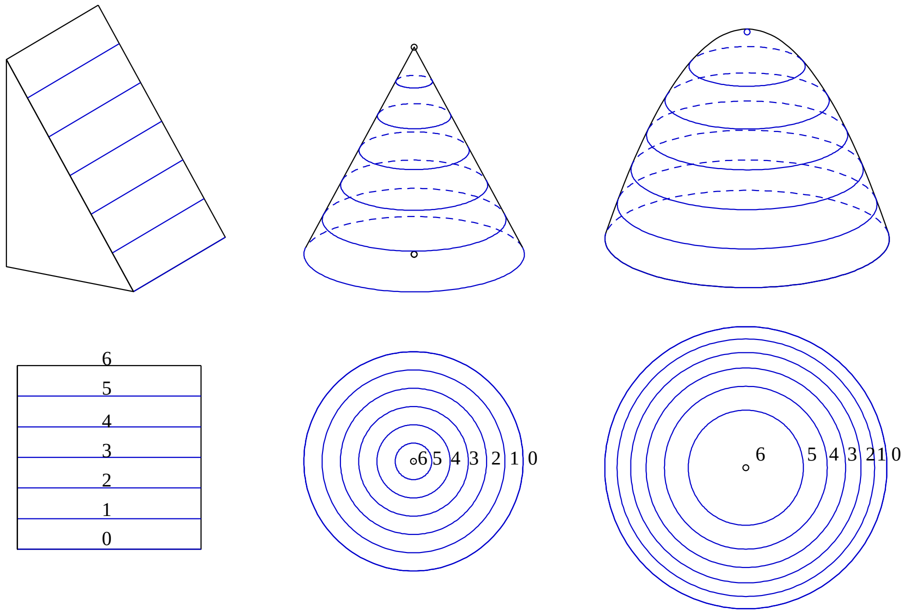


Abbildung 4.19: Kotierte Projektion (unten) einer Ebene, eines Kegels bzw. eines Paraboloids

Der Schnitt zweier in kotierter Projektion gegebener Flächen läßt sich leicht ermitteln: Man muss nur die Schnittpunkte von Höhenlinien zu gleichen Höhen der beiden Flächen bestimmen. Die Verbindungskurve dieser Punkte ergibt dann (näherungsweise) die Schnittkurve.

Aufgabe 4.5 *:*
Bestimme die Schnittkurven in kotierter Projektion zwischen
a) Ebene und Kegel   b) Ebene und Paraboloid   (Abb. 4.20).

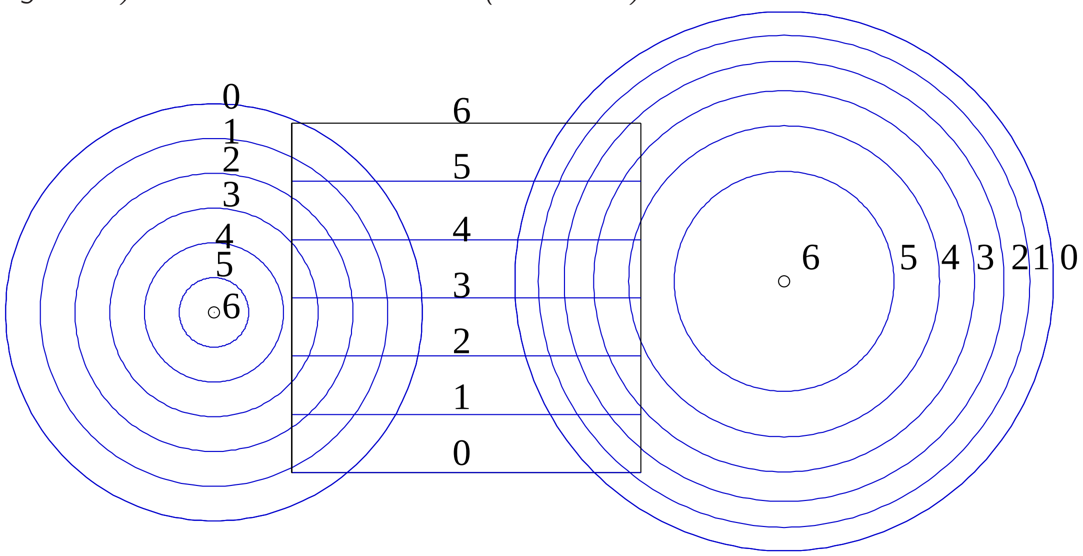


Abbildung 4.20: Schnittkurven in kotierter Projektion zwischen Ebene, Kegel und Paraboloid

4.6 Böschungsflächen

(s. LEO S.193)

Schüttet man entlang eines sich über einer Grundebene π erhebenden Straßenrandes Erde, so entsteht ein sog. **Böschungskörper**, dessen Oberfläche **Böschungsfläche** genannt wird. Man kann sich eine Böschungsfläche als *Einhüllende* einer Schar von Kegeln (den Schüttkegeln) vorstellen, deren Spitzen sich auf einer vorgegebenen Kurve (Straßenrand) befinden, siehe Abbildung 4.21. Die Böschungsfläche berührt jeden Kegel in einer Geraden und diese Geraden sind die Geraden des steilsten Abfalls der Böschungsfläche. Sie heißen daher *Fall-Linien*. Böschungsflächen kann man auch als Regelflächen auffassen, bei der die Regelgeraden immer dieselbe "Steilheit" besitzen.

Um eine kotierte Projektion einer Böschungsfläche zu zeichnen, muss man Höhenlinien bestimmen. Da eine Höhenlinie jeden Kegel in einem Höhenkreis berührt, kann man sich eine Höhenlinie als Einhüllende einer Schar von (Höhen–)Kreisen von Kegeln vorstellen, siehe Abbildung 4.21. Auf diese Weise lassen sich die Höhenlinien der Böschungsfläche leicht zeichnerisch ermitteln.

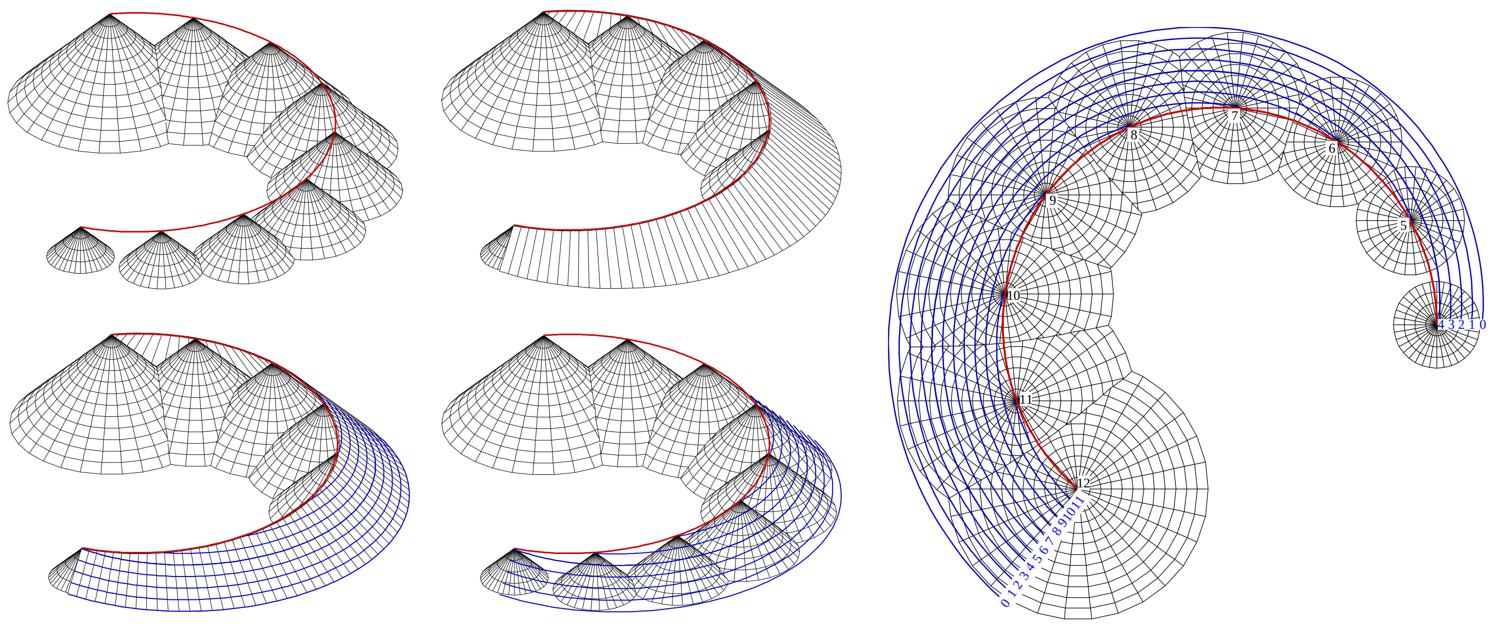


Abbildung 4.21: Erzeugung und kotierte Darstellung einer Böschungsfläche entlang einer Schraublinie

In der Praxis wird die Kurve (Straßenrand) kotiert gegeben und die Material-abhängige "Steilheit" der Schüttkegel durch die Neigung der darauf liegenden Geraden (Fall-Linien).

Dieselben Überlegungen übertragen sich auch auf den Fall bei dem kein Gelände aufgeschüttet wird, sondern *abgetragen*. Die dabei entstehende Böschungsfläche kann man als Einhüllende der "Abtragungskegel" auffassen. Auch in diesem Fall ergeben sich Höhenlinien als Einhüllende von Höhenkreise (der Abtragungskegel).

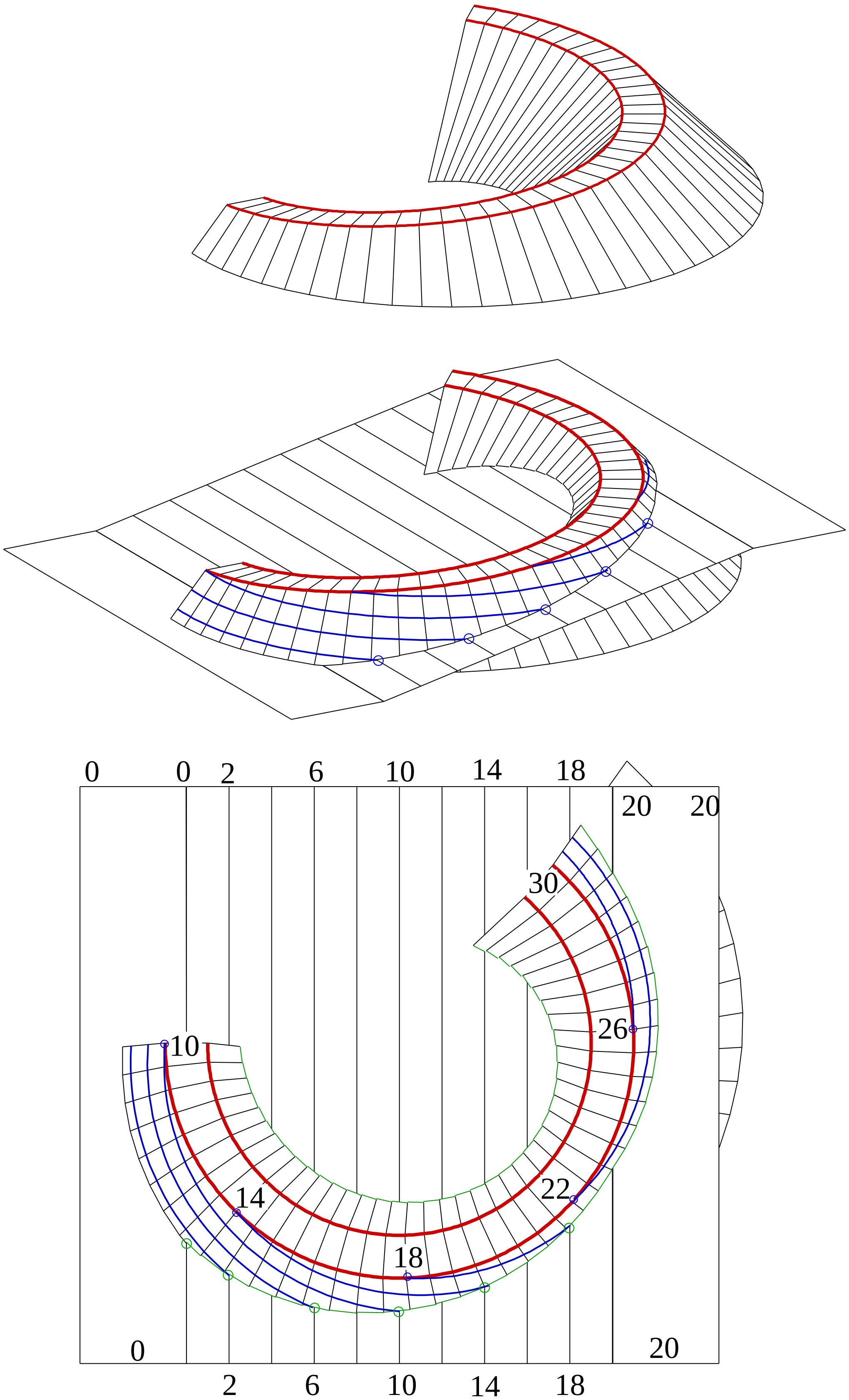


Abbildung 4.22: Böschungsfläche einer Strasse und deren Schnitt mit einem Gelände (Ebenenstücke)

Aufgabe 4.6 *In kotierter Projektion ist eine Straße und eine Runde Plattform in einem horizontalen ebenen Gelände (Höhe 0) gegeben (Abb. 4.23). Konstruiere den Böschungskörper mit Steilheit 1 für die Straße und Steilheit 2/3 für die Plattform sowie den Schnitt mit dem Gelände. Schneiden sich beide Böschungskörper?*

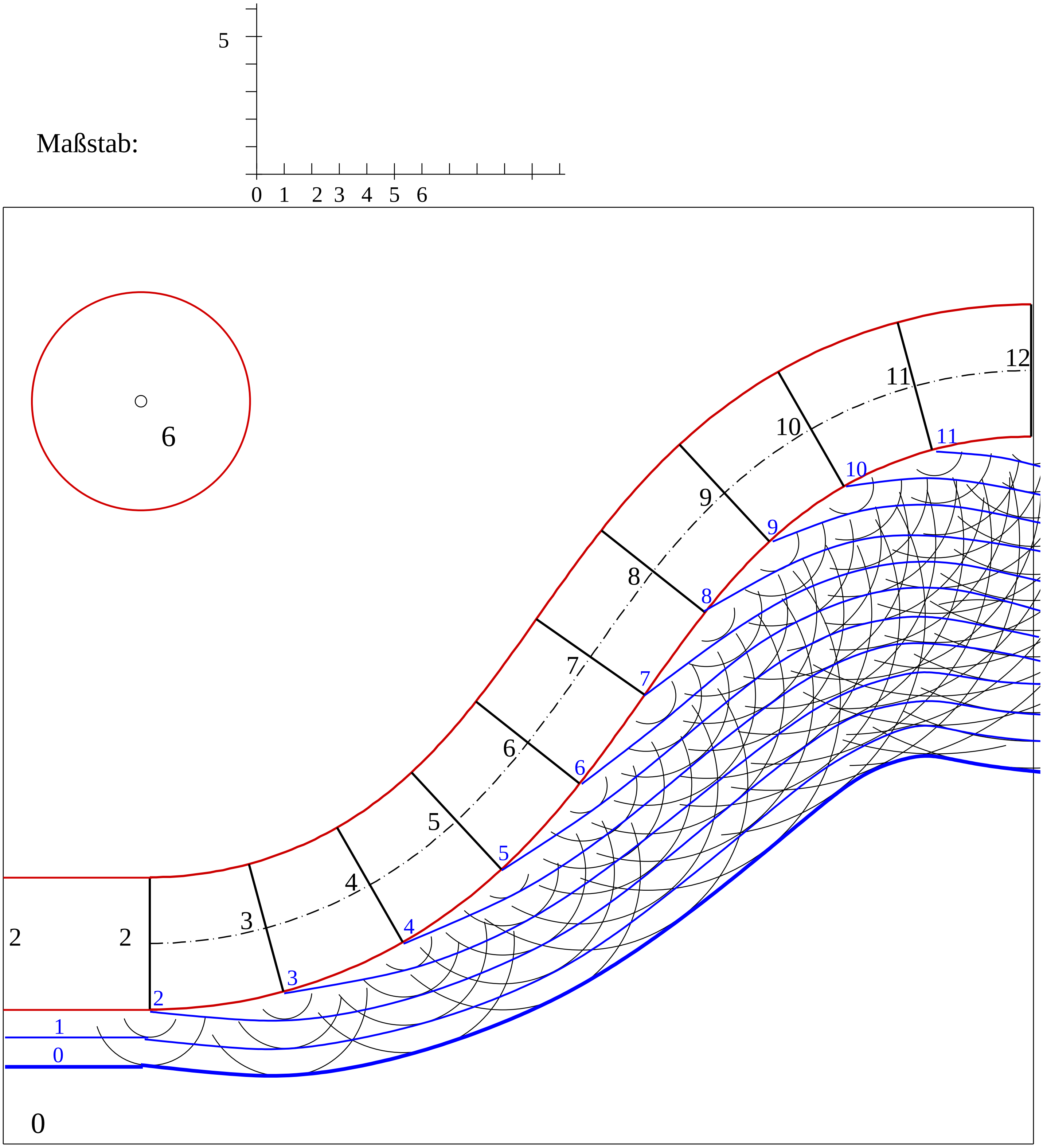


Abbildung 4.23: Aufgabe: Böschungsfläche einer Straße und einer Plattform

4.7 Durchdringungen einer Kurve und einer Fläche

Gegeben: Kurve k und Fläche Φ.
Gesucht: Durchstoßpunkt $S = k \cap \Phi$.
Lösungsidee: Die Kurve wird in eine Hilfsfläche Ψ (meistens: Ebene oder Kugel) so eingebettet, dass die Schnittkurve $h := \Psi \cap \Phi$ (Gerade oder Kreis) einfach zu konstruieren ist. Der/die Durchstoßpunkt(e) ergeben sich dann aus $k \cap h$.

4.7.1 Beispiel 1: Gerade und Kugel

Gegeben: Gerade g, Kugel Φ mit Mittelpunkt M in Grund– und Aufriss.

Durchführung:

1. Führe eine neue Risstafel π_3 so ein, dass die Gerade g zu π_3 parallel ist.
2. Wir nehmen an, dass π_3 der Grundrisstafel π_1 zugeordnet ist. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene ε, die g enthält und parallel zu π_3 ist. ε schneidet aus der Kugel einen **Kreis** c aus, dessen Mittelpunkt M_c in π_3 mit M''' (der Kugel) zusammenfällt.
3. $c''' \cap g'''$ liefert die Durchstoßpunkte D_1''', D_2''' zunächst in π_3.
4. Konstruiere D_1', D_2' und dann D_1'', D_2''.

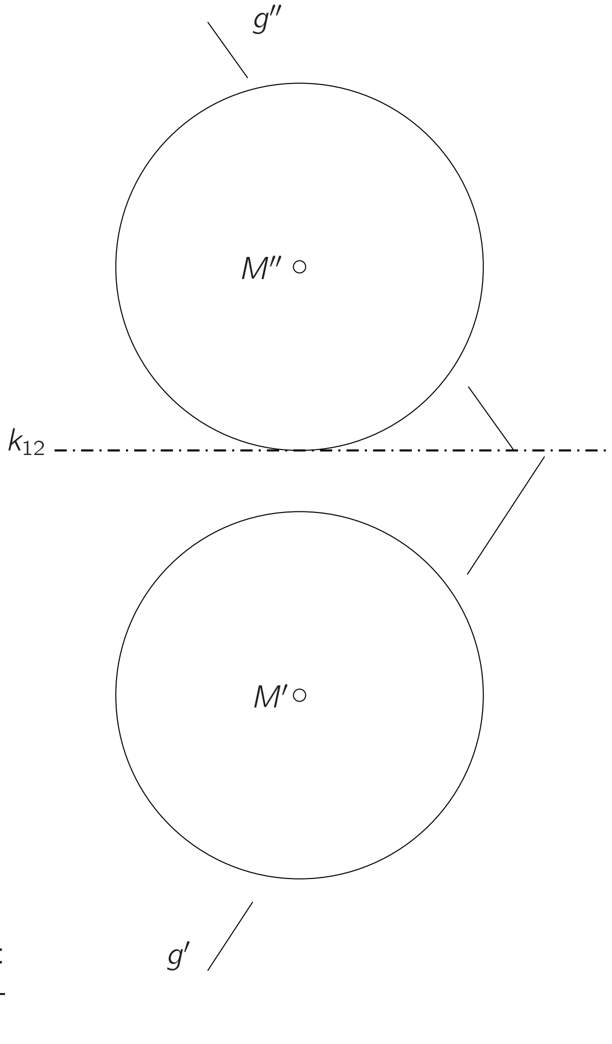


Abbildung 4.24: Schnitt: Kugel–Gerade

4.7.2 Beispiel 2: Gerade und Kegel

Gegeben: Gerade g, Kegel Φ mit Spitze S, Achse a, Basiskreis c in Grund– und Aufriss.

Durchführung:

1. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene ε durch die Kegelspitze S und g. ε schneidet aus dem Kegel zwei Mantellinien l_1, l_2 aus. l_1, l_2 bestimmt man über die Spur s'_ε der Ebene ε. Hierzu schneidet man zwei Geraden von ε (eine Gerade kann g sein) mit π_1.
2. $s'_\varepsilon \cap c'$ liefert Punkte L_1, L_2. Die Gerade durch S und L_1 bzw. L_2 ist die Gerade l_1 bzw. l_2.
3. $D_1 = l_1 \cap g$ und $D_2 = l_2 \cap g$ sind die gesuchten Durchstoßpunkte.

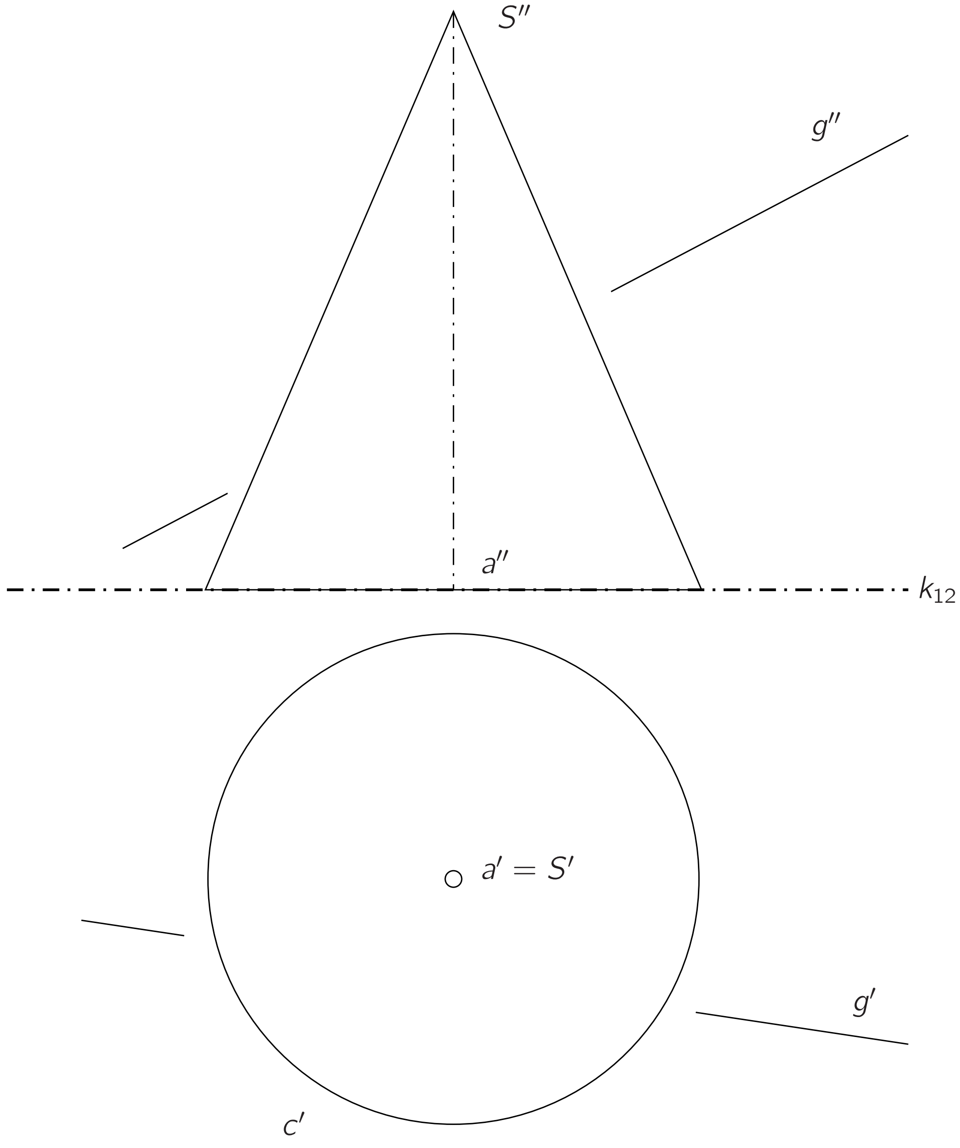


Abbildung 4.25: Schnitt: Kegel–Gerade

4.8 Durchdringungskurven zweier Flächen

Die *Durchdringungs*– oder *Verschneidungskurven* zweier Flächen Φ_1, Φ_2 konstruiert man punktweise wie folgt. Man wählt eine **Hilfsfläche** Ψ, die die gegebenen Flächen Φ_1, Φ_2 in einfachen Kurven (z.B. Geraden, Kreise) k_1 und k_2 schneidet. Jeder Schnitt $k_1 \cap k_2$ liefert einen oder mehrere Punkte von Φ_1 und Φ_2. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine “genügende” Anzahl von gemeinsamen Punkten gefunden hat.

4.8.1 Hilfsebenenverfahren (s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2) (Abb. 4.26).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: Hilfs**ebene** $\varepsilon \perp a_1$ schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.

Durchführung:

1. Wähle eine geeignete Ebene ε und zeichne ε''.
2. Zeichne den Grundriss c' des Schnittkreises $\varepsilon \cap \Phi_1$ (Radius r) .
3. Ziehe im Grundriss die Parallelen g', h' zu a_2' im Abstand d.
4. Die (max. vier) Schnittpunkte P', Q' des Kreises c' mit g', h' sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf ε'' erhält man dann P'', Q''.
6. Wiederhole 1.–5. n–mal.
7. Verbinde die Punkte in der “richtigen” Reihenfolge mit einer Kurve.

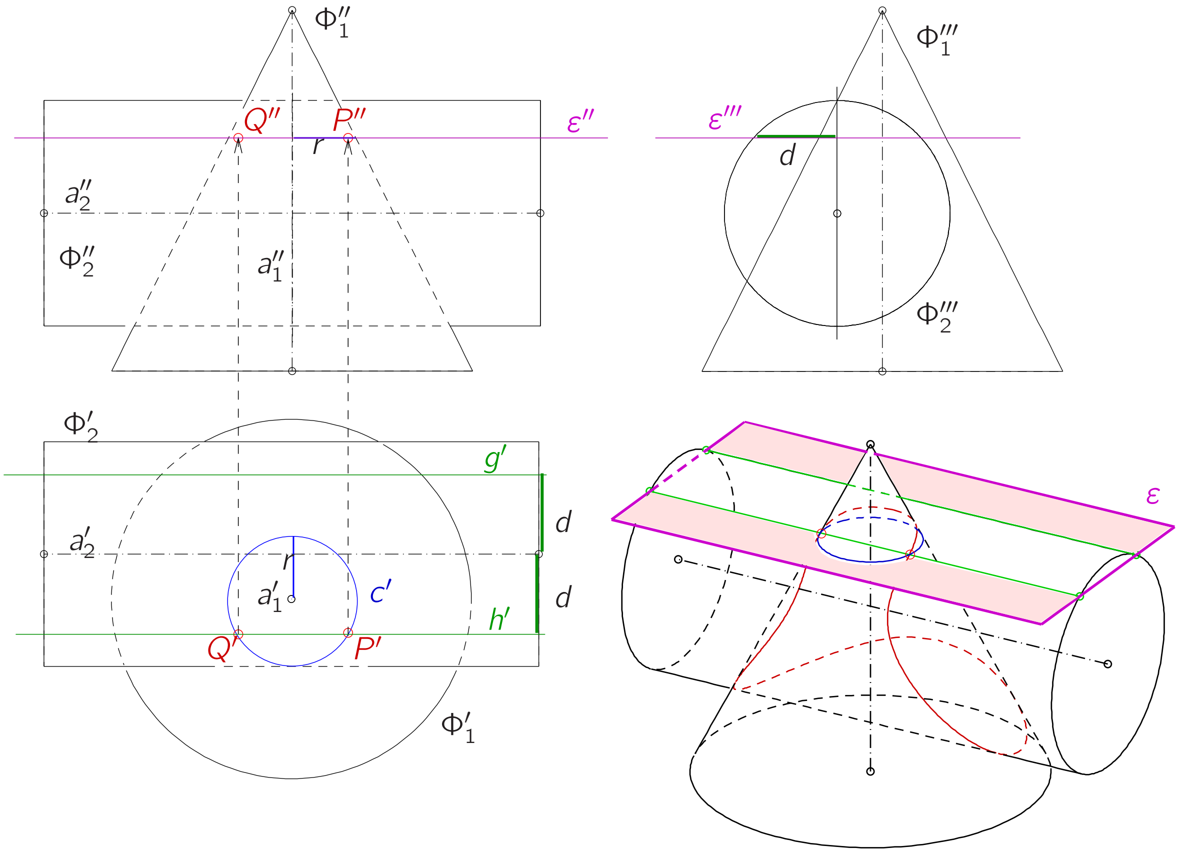


Abbildung 4.26: Veranschaulichung des Hilfsebenenverfahrens

Aufgabe 4.7 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.27).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.

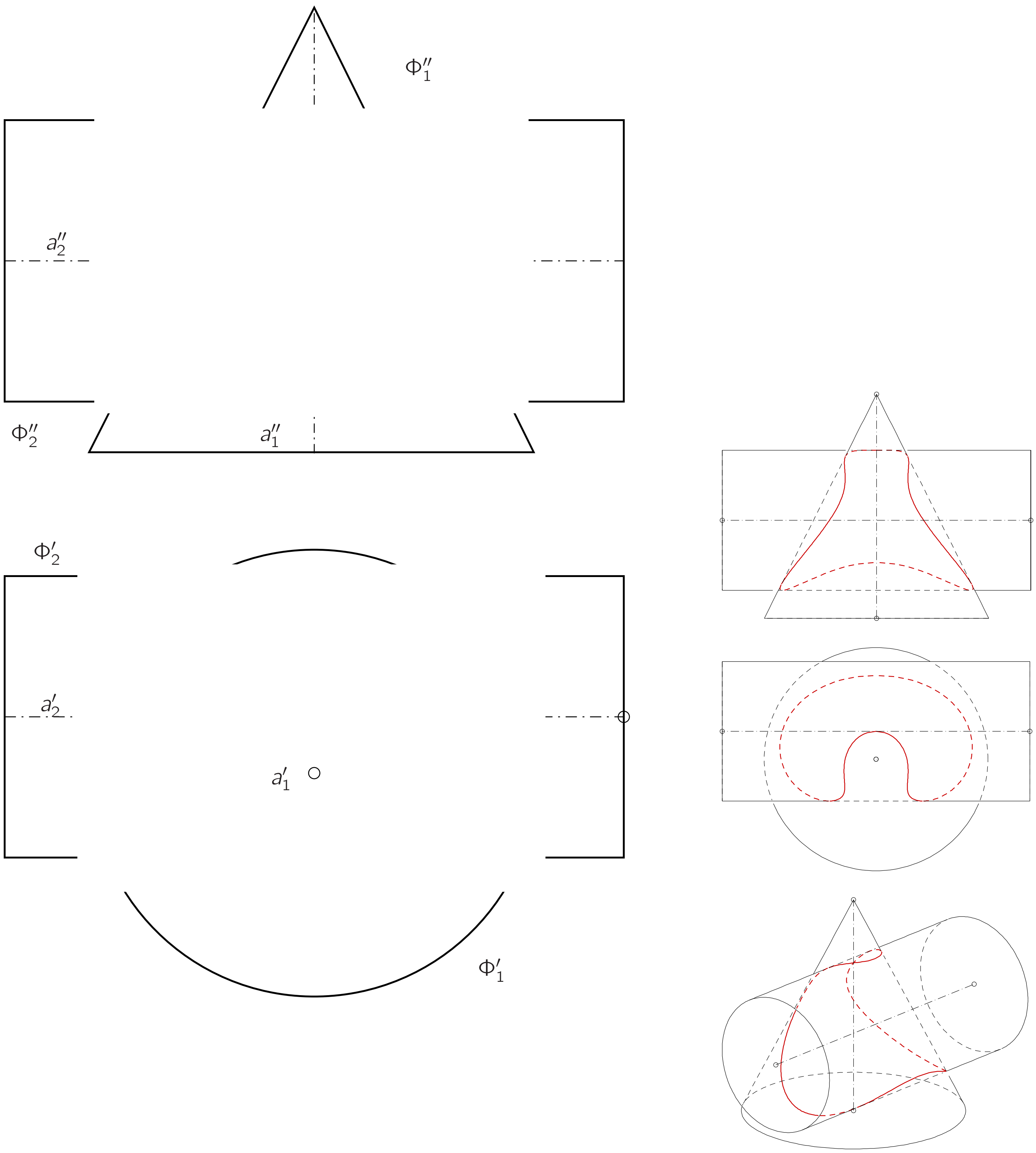


Abbildung 4.27: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

4.8.2 Hilfskugelverfahren

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2). Die Achsen schneiden sich! (Abb. 4.26).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: In diesem Beispiel liefern horizontale Schnitte mit dem Zylinder Ellipsen, d.h. nicht einfach zu zeichnende Kurven. Deshalb benutzen wir eine andere Idee: Wir wählen als Hilfsflächen **Kugeln** mit dem Schnittpunkt $M = a_1 \cap a_2$ der Achsen als Mittelpunkt. Solche Kugeln mit geeigneten Radien schneiden sowohl den Kegel als auch den Zylinder in **Kreisen** als Hilfskurven. Diese Kreise sind alle senkrecht zur Aufrisstafel.

Durchführung:

1. Wähle eine Kugel Ψ mit Mittelpunkt M, die beide Flächen schneidet.
2. Bestimme im Aufriss die Schnittkreise k_1, l_1 der Kugel mit dem Kegel Φ_1 und k_2, l_2 der Kugel mit dem Zylinder Φ_2. Wir verwenden hier nur k_2.
   $k_1'', l_1'', k_2'', l_2''$ sind Strecken, da alle Kreise zu π_2 senkrecht sind.
3. $k_1'' \cap k_2''$ und $l_1'' \cap k_2''$ liefern den Aufriss von max. vier Punkten P, Q, R, S der Durchdringungskurve. Es ist $P'' = Q'', R'' = S''$.
4. Zeichne k_1', l_1' und übertrage P, Q, R, S in den Grundriss. P', Q', R', S' liegen auf k_1', l_1'.
5. Wiederhole 1.–4. n–mal.
6. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

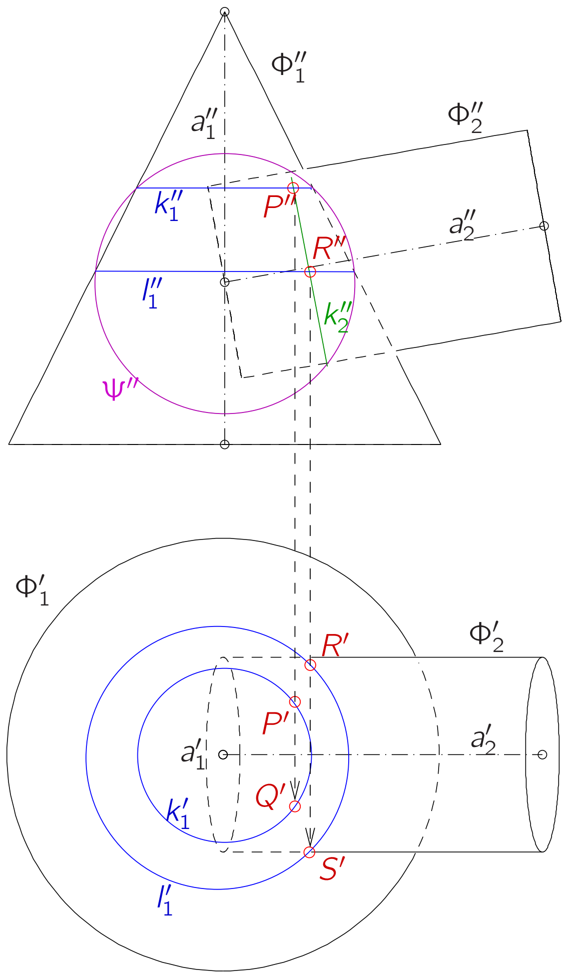


Abbildung 4.28: Veranschaulichung des Hilfskugelverfahrens

Aufgabe 4.8 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.29).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.

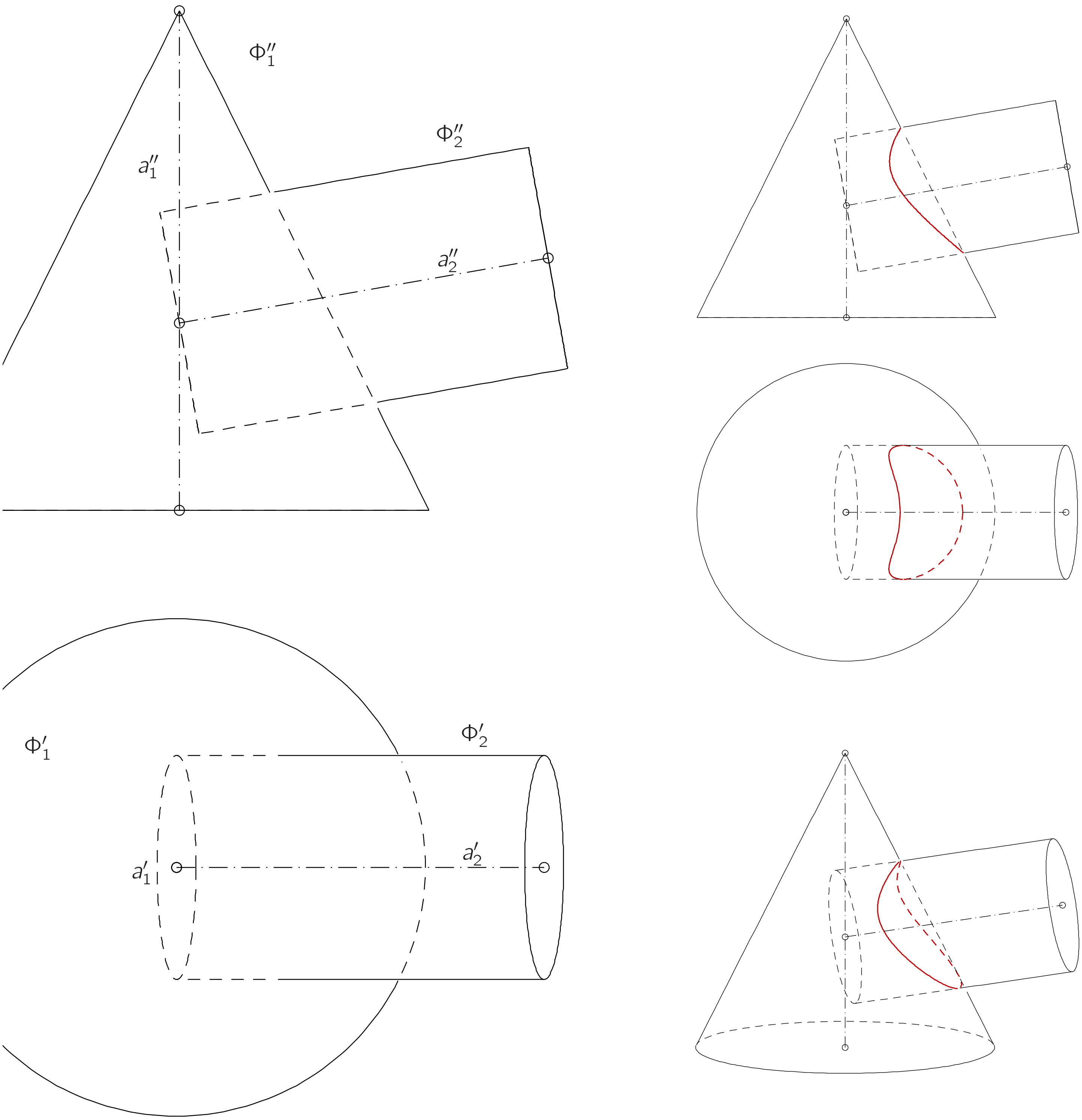


Abbildung 4.29: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverfahren)

4.8.3 Vergleich der Verfahren

a) Das **Hilfskugelverfahren** ist auf alle Rotationsflächen mit sich **schneidenden Achsen** anwendbar. Hilfskurven sind dann immer Kreise.
b) Die Voraussetzung für das **Hilfsebenenverfahren** ist: Es müssen sich **einfach** zu zeichnende **Hilfskurven** bei Schnitten mit geeigneten Ebenen ergeben. Meistens werden die Hilfsebenen senkrecht zu einer Risstafel gewählt.

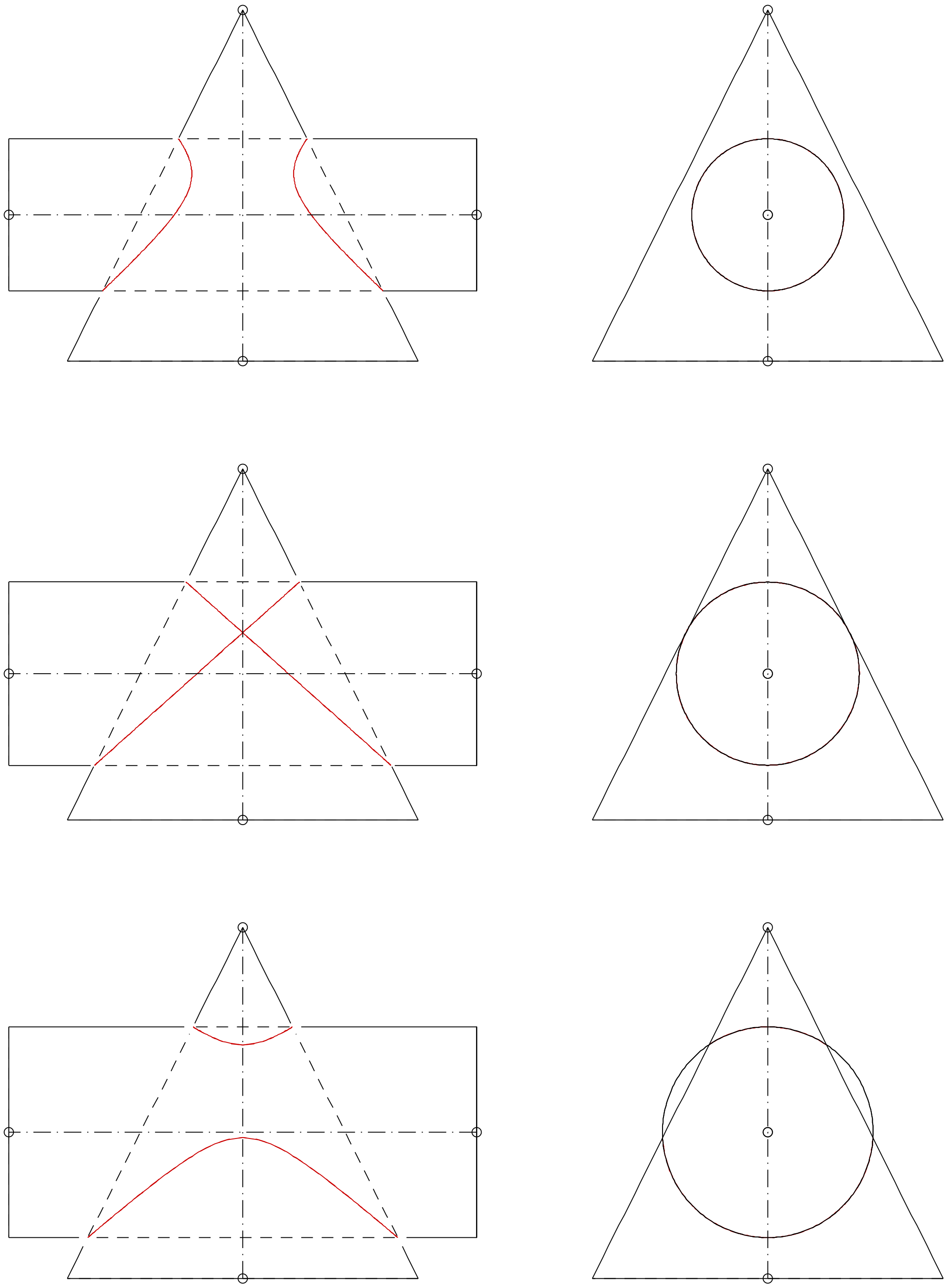


Abbildung 4.30: Veränderung der Schnittkurven von Kegel und Zylinder bei wachsendem Zylinderradius

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zu Schnittkurven ab.
a) Haben die beiden Flächen in einem Schnittpunkt *P* unterschiedliche **Tangentialebenen**, so ist der Schnitt in einer kleinen Umgebung von *P* durch eine glatte Kurve gegeben. Stimmt dagegen die Tangentialebene beider Flächen im Punkt *P* überein, so können sich mehrere Durchdringungskurven in *P* schneiden, siehe Abb. 4.30, Mitte, oder die folgende Abbildung.
b) Schneiden sich speziell zwei **Drehzylinder** oder **Drehkegel** in einem Punkt, für den beide Flächen eine gemeinsame, in diesem Punkt tangentiale Kugel besitzen, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei **Ellipsen**: Beispiele sind das Kreuzgewölbe, Abb. 4.31, und der in der Mitte dargestellte Schnitt von Abb. 4.30.

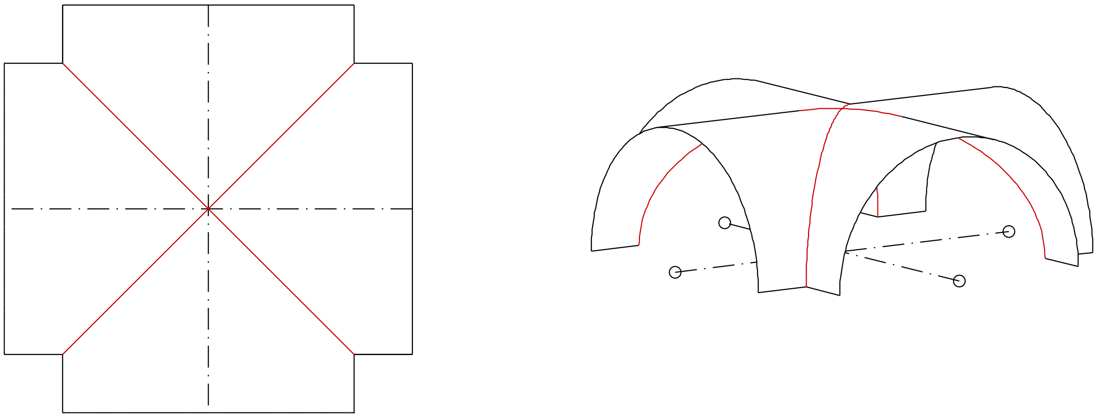


Abbildung 4.31: Kreuzgewölbe (Schnitt zweier Zylinder mit gleichen Radien und sich schneidenden Achsen)

Kapitel 5

Zentralprojektion

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die Zentralprojektion beschreiben und verstehen. Als zweites wollen wir sehen, wie man eine Zentralprojektion aus Grund- und Aufriss gewinnen kann. In Architekturdarstellungen benutzt man gern Schatten zur Verbesserung der räumlichen Eindrucks; daher befassen wir uns mit Schatten in der Zentralprojektion in einem Abschnitt. Danach behandeln wir, wie man aus einer Zentralprojektion, z.B. Photographie, wahre Längen und damit Grund- und Aufriss gewinnen kann. Diese für die in der Praxis wichtige Aufgabe nennt man auch *Rekonstruktion*. Abschließend befassen wir uns mit der Darstellung von Kurven und Umrissen in der Zentralprojektion.

5.1 Zentralprojektion als Abbildung (s. LEO S.213)

In Kapitel 1 wurden bereits wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert, siehe Abbildung 5.1. Man nennt das durch Zentralprojektion entstandene Bild auch **perspektives Bild**. Auch eine **Photographie** ist eine Zentralprojektion.

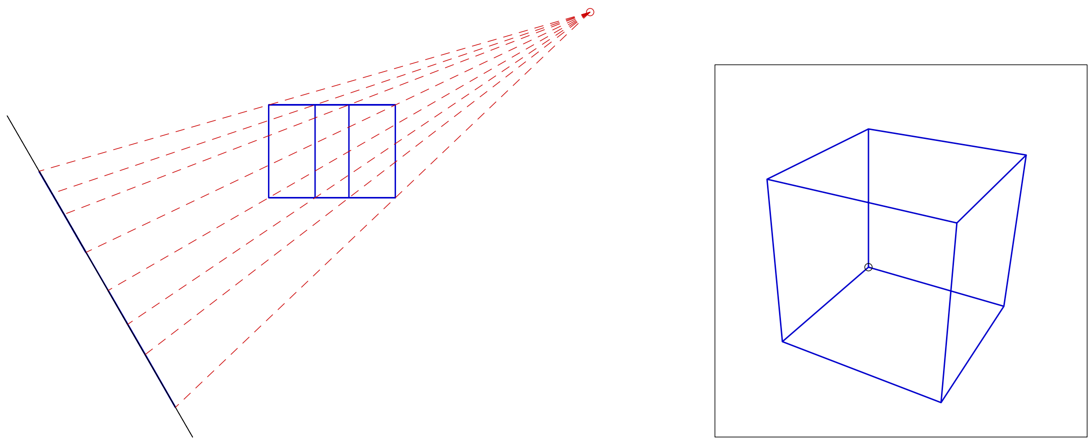


Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man eine Zentralprojektion mit nur einem Auge, und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Beachten Sie aber, dass die Betrachtung von jedem anderen Punkt aus zu einem nicht mehr korrekten räumlichen Eindruck führt. Es gibt also für jede Photographie nur einen einzigen idealen Betrachtungspunkt!

5.1.1 Bezeichnungen und Konventionen

O	:	**Augpunkt**: Projektionszentrum, alle Sehstrahlen laufen durch O
π	:	**Bildtafel**: Bei uns immer eine vertikale Ebene.
H	:	**Hauptpunkt** : Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel. Bei Original–Photographien ist H der Mittelpunkt des Bildes.
d	:	**Distanz**: Abstand Augpunkt – Hauptpunkt
π_1	:	**Standebene**: Grundrissebene senkrecht zu π. Bei uns immer eine horizontale Ebene.
s	:	**Standlinie**: Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel
h	:	**Horizont**: Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel. Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H.
π_v	:	**Verschwindungsebene**: Ebene durch O, die parallel zur Bildtafel ist.

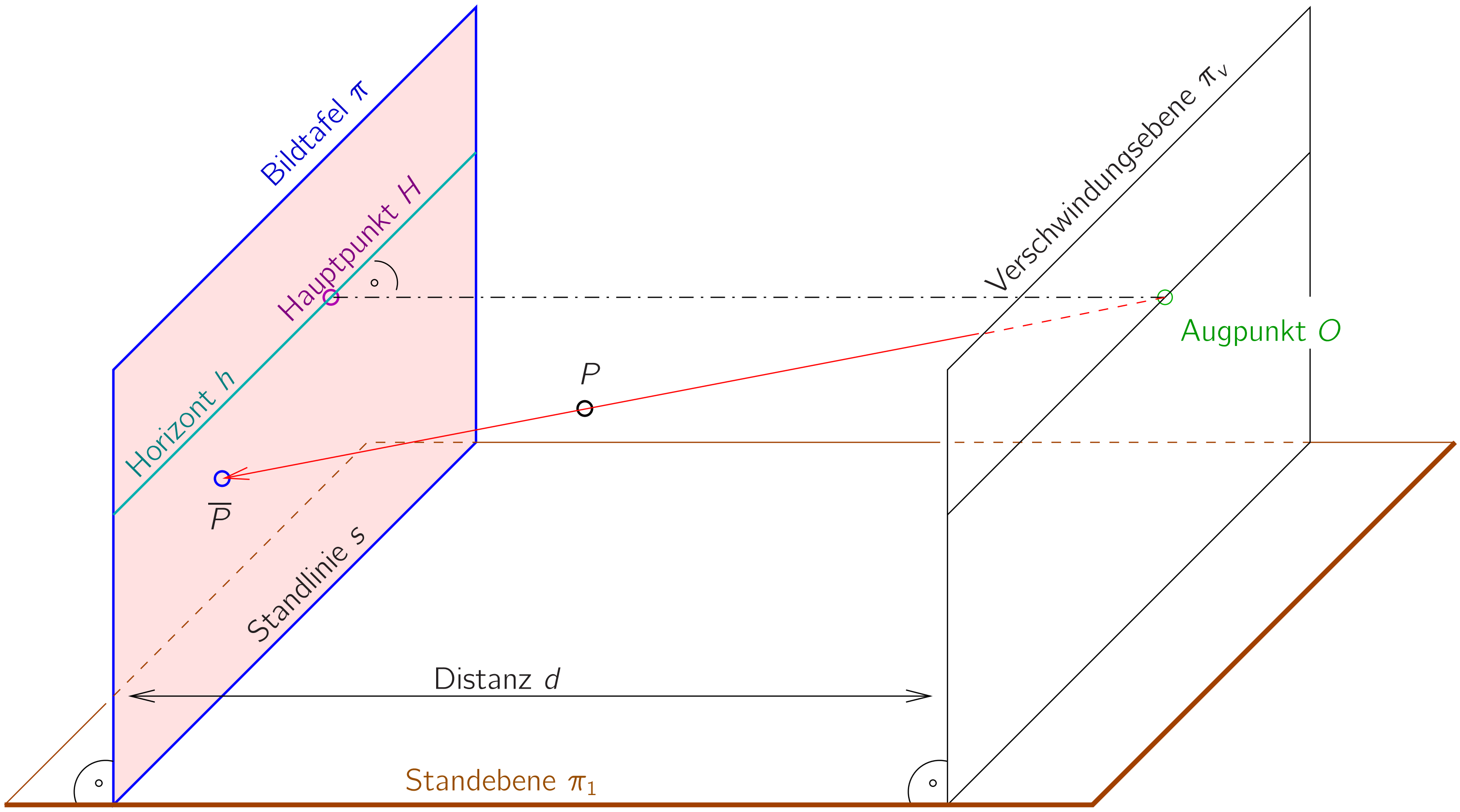


Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Die Zentralprojektion eines Punktes P erhält man, indem man den Sehstrahl durch O mit π schneidet. Punkte in der Verschwindungsebene besitzen kein Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen. Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.
Die Perspektive ist als Abbildungsvorschrift bereits ohne die Wahl der Standebene π_1 definiert. Die Wahl dieser Ebene wird erst dann wichtig werden, wenn wir perspektivische Bilder aus Grund- und Aufriss gewinnen.

5.1.2 Fluchtpunkte

Zwei **parallele Geraden** werden unter Zentralprojektion auf zwei Geraden abgebildet. Diese Bildgeraden sind jedoch im allgemeinen *nicht* mehr parallel, sondern schneiden sich in einem Punkt, dem **Fluchtpunkt**.
Um den Fluchtpunkt zu bestimmen, benutzen wir folgende Bezeichnung: Der Durchstoßpunkt S_g einer Geraden g mit der Bildtafel π heißt **Spurpunkt** von g. Man erhält den Fluchtpunkt F von g als Spurpunkt derjenigen zu g parallelen Geraden g_0, die durch den Augpunkt O geht. Daher besitzen sämtliche parallele Geraden denselben Fluchtpunkt. Man sagt: Eine Schar paralleler Geraden bestimmt einen Fluchtpunkt.

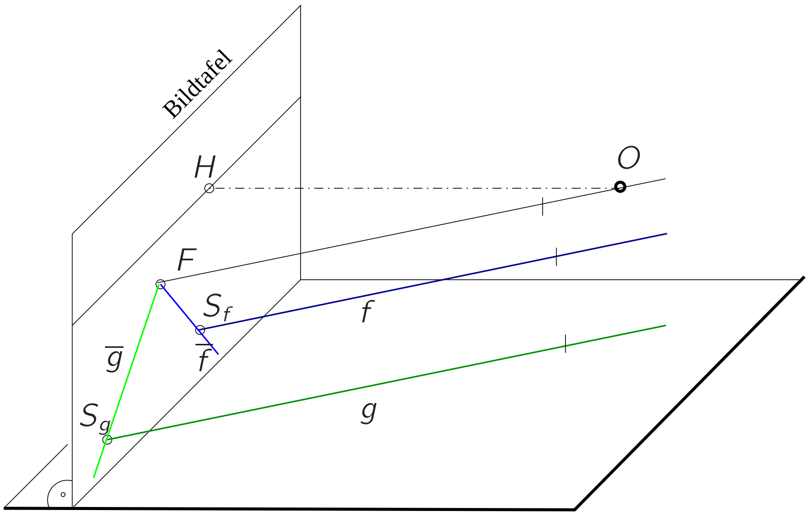


Abbildung 5.3: Flucht– und Spurpunkt paralleler Geraden

1. Fluchtpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont h.
2. Eine Gerade ist durch ihren Spurpunkt und ihren Fluchtpunkt bereits festgelegt.
3. Geraden, die senkrecht zur Bildtafel sind, heißen **Tiefenlinien**. Ihr Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt H.
4. Sind Geraden zur Bildtafel parallel, so bleiben ihre Bildgeraden parallel. Sie besitzen als einzige Geraden keinen Fluchtpunkt.

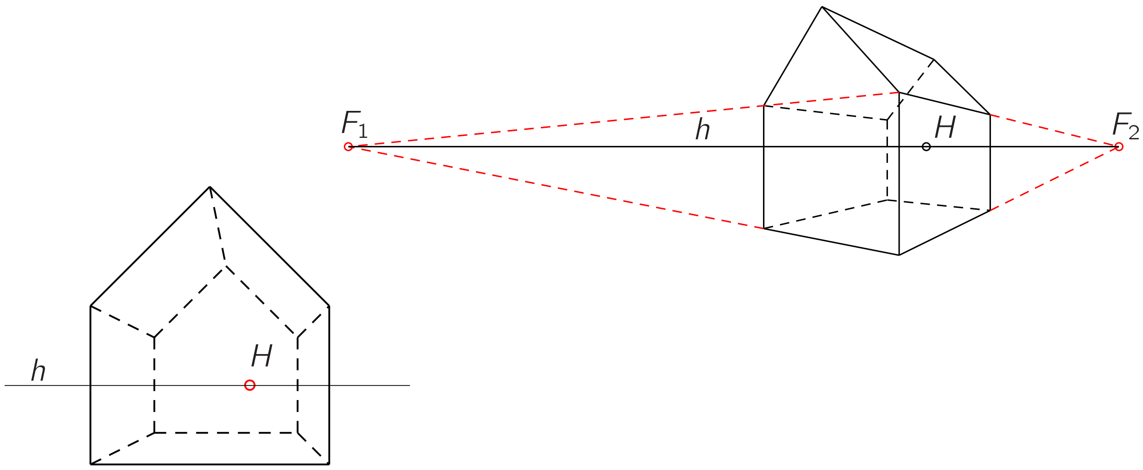


Abbildung 5.4: Fluchtpunkte eines Hauses

So wie parallele Geraden einen Fluchtpunkt bestimmen, so definieren parallele Ebenen eine *Fluchtgerade*. Beispielsweise hat die Schar horizontaler Ebenen den Horizont als Fluchtgerade.

5.2 Subjektive Aspekte der Perspektive

Wir hatten schon erwähnt, dass eine Perspektive eigentlich nur von einem Punkt aus betrachtet den korrekten räumlichen Eindruck ergibt. Wir befassen uns hier mit der Frage, wann die mathematische Abbildungsvorschrift ein für das menschliche Auge gutes Bild ergibt.

5.2.1 Sehkreis und -kegel

Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb des **Sehkegels** (Kegel mit Spitze in O und Achse OH, dessen halber Öffnungswinkel $\approx 30°$ ist) liegen.

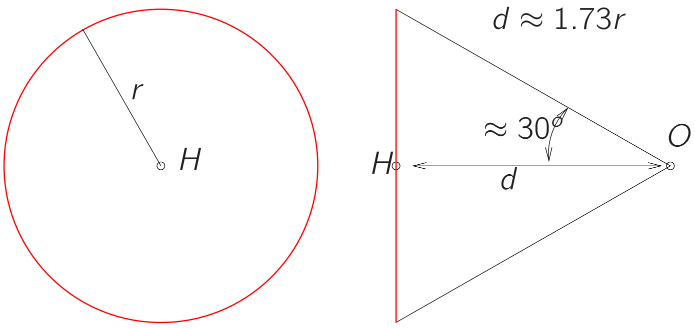


Abbildung 5.5: Sehkreis

Nur innerhalb des Sehkreises liefert die Perspektive daher ein als zutreffend empfundenes Bild. Die folgende Abbildung belegt dies:

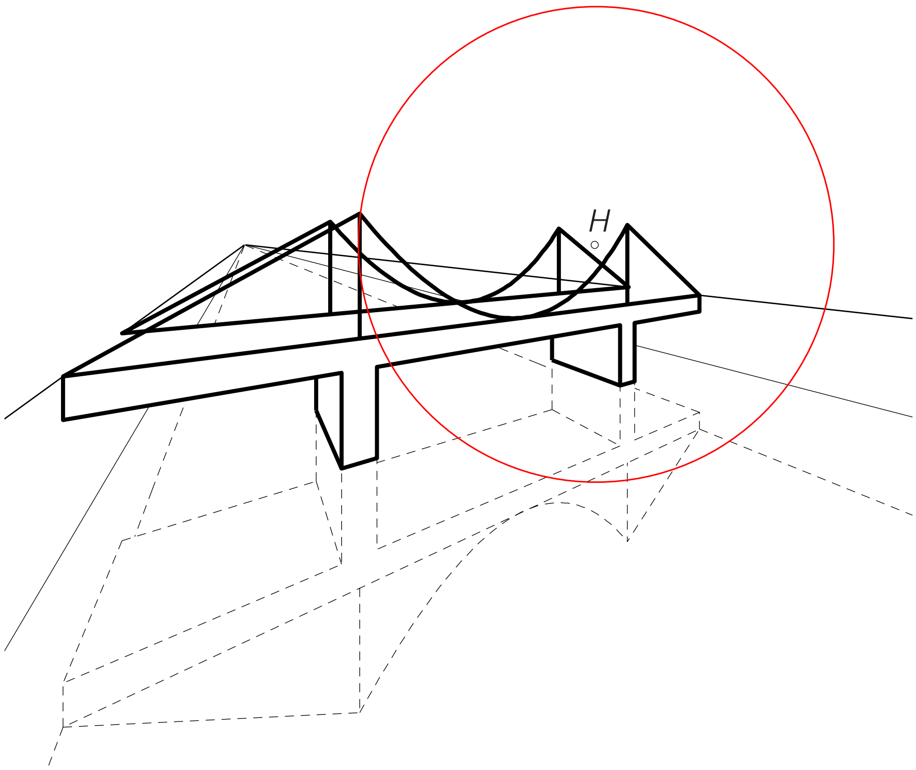


Abbildung 5.6: Zentralprojektion mit Sehkreis

5.2.2 Einfluss von Hauptpunkt und Distanz auf die Perspektive

Wir wollen nun an einem Beipsiel untersuchen, wie verschiedene Wahlen von Distanz und Bildebene das perspektivische Bild beeinflussen.
Bei festem Augpunkt führt die Verschiebung der Bildtafel nur zu einer Vergrößerung oder Verkleinerung des perspektivischen Bildes. Dies macht man sich sofort aus dem Abbildungsgesetz klar.
Verschiebt man das Objekt relativ zu festem Augpunkt und Bildebene, so verändert sich neben der Größe auch die Stärke des perspektivischen Eindrucks. Kommt man dem Objekt zu nahe, so wird der Sehkegel überschritten und das Bild wirkt überrissen.

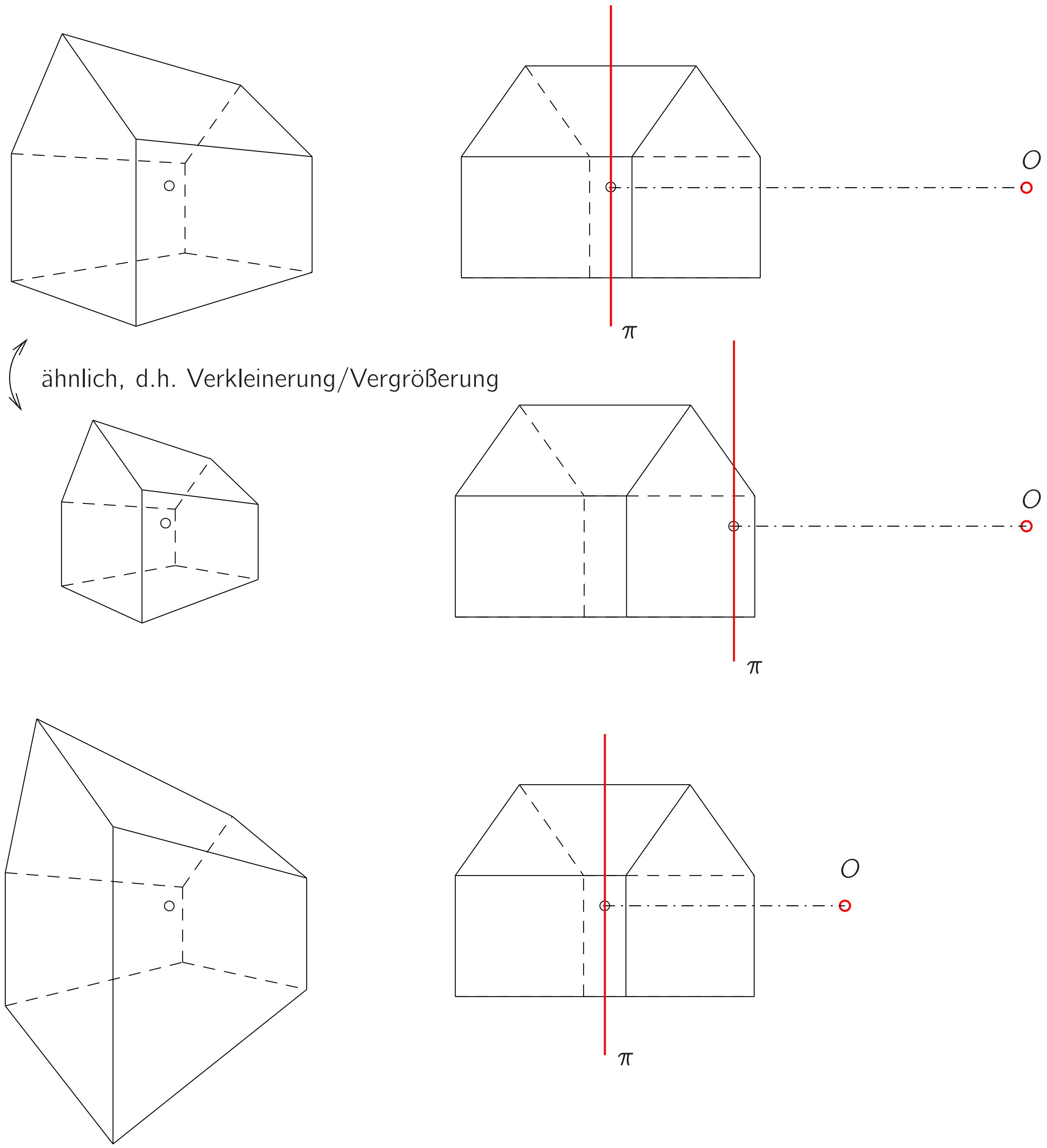


Abbildung 5.7: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

Die Höhe des Augpunktes entspricht natürlich unterschiedlichen Betrachtspunkten eines Objekts. Die im ersten Bild gezeigte Froschperspektive ist sprichwörtlich; auch eine zu große Höhe wie im zweiten Bild ist unnatürlich. Im dritten Bild wird eine schräge Zentralprojektion gezeigt, bei der die Bildtafel nicht vertikal ist. Das Ergebnis entspricht einem Luftbild.

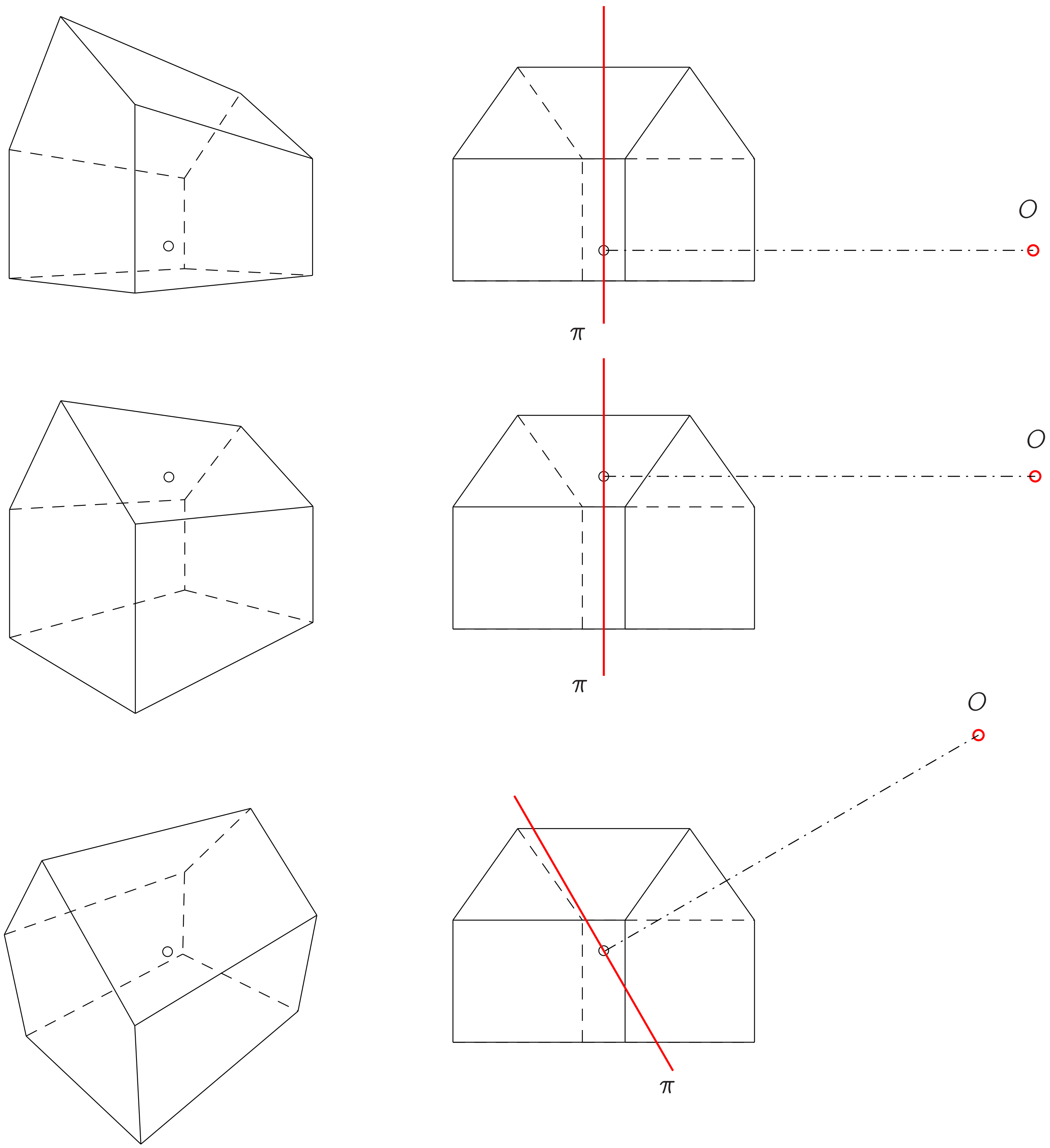


Abbildung 5.8: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

5.3 Konstruktion perspektivischer Bilder aus Grund- und Aufriss

5.3.1 Durchstoßpunktmethode

Wir beschränken uns auf den Fall einer vertikalen Bildtafel π bzw. einer horizontalen Grundrissebene π_1. Wir erinnern daran, dass der Schnitt der Bildebene mit derjenigen horizontalen Ebene, die O und H enthält, gerade der Horizont h ist. Der Horizont enthält also die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden, und man kann ihn auch als Fluchtgerade der horizontalen Ebenen verstehen.

Vorgabe	:	a) Bildtafel π und der Augpunkt O in Grund– und Aufriss.
		b) Objekt in Grund– und Aufriss.
Gesucht	:	Das perspektive Bild des Objekts.

Verfahren: (s. LEO S.217)

(0) Bestimmung des **Hauptpunktes** H (Lot von O' auf π') und des **Horizonts** h (Höhenlinie durch O in π) in Grund– und Aufriss. "Festmachen" des Bildes auf der Zeichenfläche durch Wahl des Hauptpunktes H. Zeichnen des Horizonts h durch H.

(1) Abbildung einer **Geraden** g:
Fluchtpunkt F_g und Spurpunkt S_g oder zwei andere Punkte der Bildgeraden $\overline{g}$ in Grund– und Aufriss bestimmen.
Übertragen dieser Punkte in die Zeichenfläche für das perspektive Bild. (Der horizontale Abstand eines Bildpunktes von H wird aus dem Grundriss, der Abstand vom Horizont h aus dem Aufriss entnommen.)
(F_g ist der Spurpunkt der zu g parallelen Gerade durch O.)

(2) Abbildung eines **Punktes** P:

I) **1. Methode** (Durchstoßpunktmethode):
a) zeichnen des Projektionsstrahls p in Grund– und Aufriss.
b) Bestimmung des Schnittpunktes $\overline{P} = p \cap \pi$ (Bildpunkt) in Grund– und Aufriss.
c) zeichnen des Bildpunktes $\overline{P}$ (horizontaler Abstand von H aus Grundriss, Abstand vom Horizont h aus Aufriss).

II) **2. Methode**:
Man bestimmt das Bild $\overline{P}$ als Schnitt zweier "leicht" zu zeichnenden **Hilfsgeraden**. Als Hilfsgeraden kann man z.B.
a) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch H),
b) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind, verwenden.

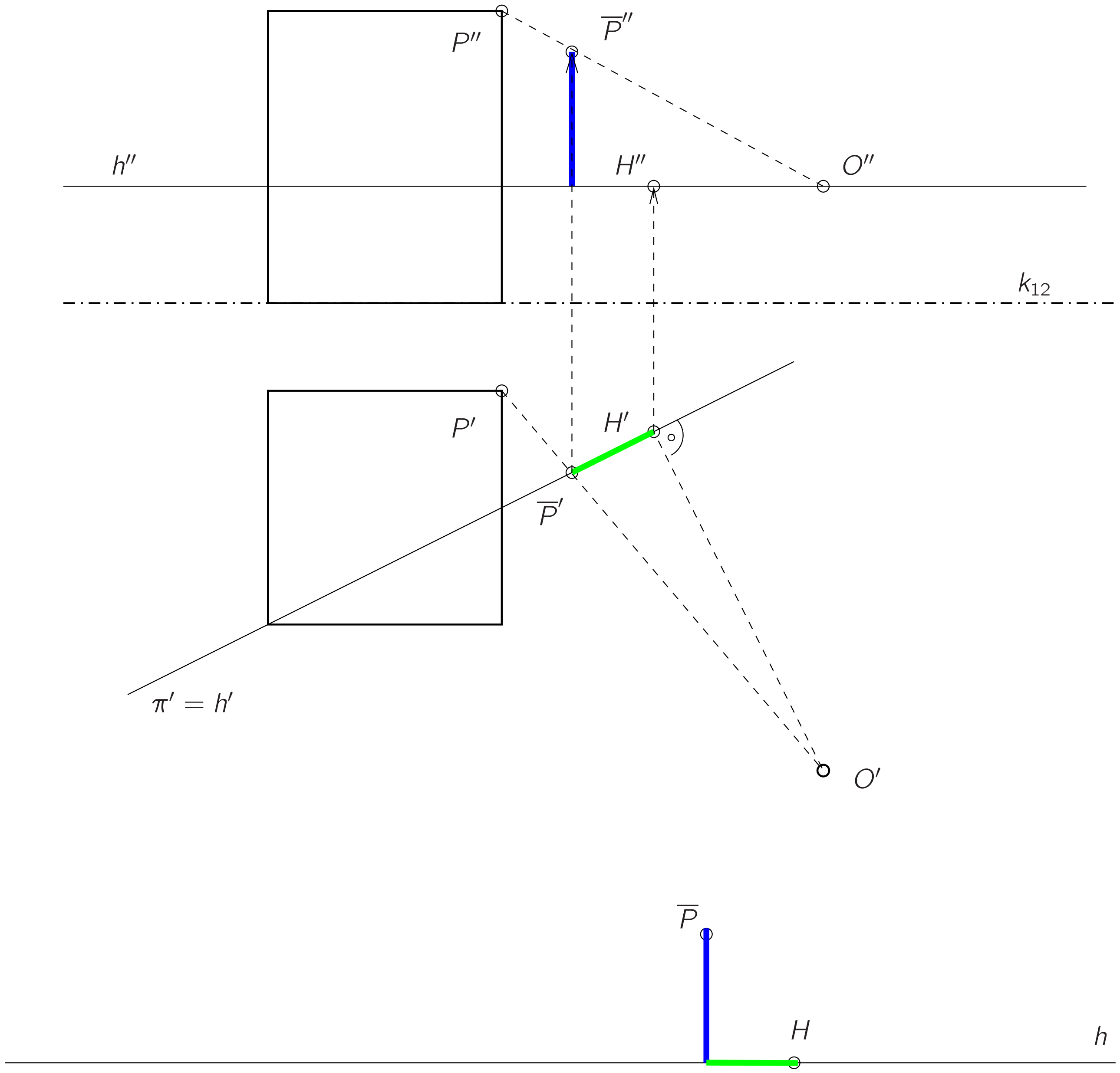


Abbildung 5.9: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethode

5.3.2 Architektenanordnung

(s. LEO S.221)

Um das Übertragen der in Grund– und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird gern die **Architektenanordnung** gewählt:

1. Der **Grundriss** wird so gedreht, dass der Horizont h parallel zu π' liegt. Dann wird er verschoben, so dass er unterhalb (oder oberhalb) des perspektiven Bild liegt, mit dem Augpunkt H auf der Geraden $\overline{O'H'}$.
2. Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass h'' mit h übereinstimmt.

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu π' ("Ordner") im Grundriss des Bildpunktes. Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont h kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

Aufgabe 5.1 *Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung (Abb. 5.10).*

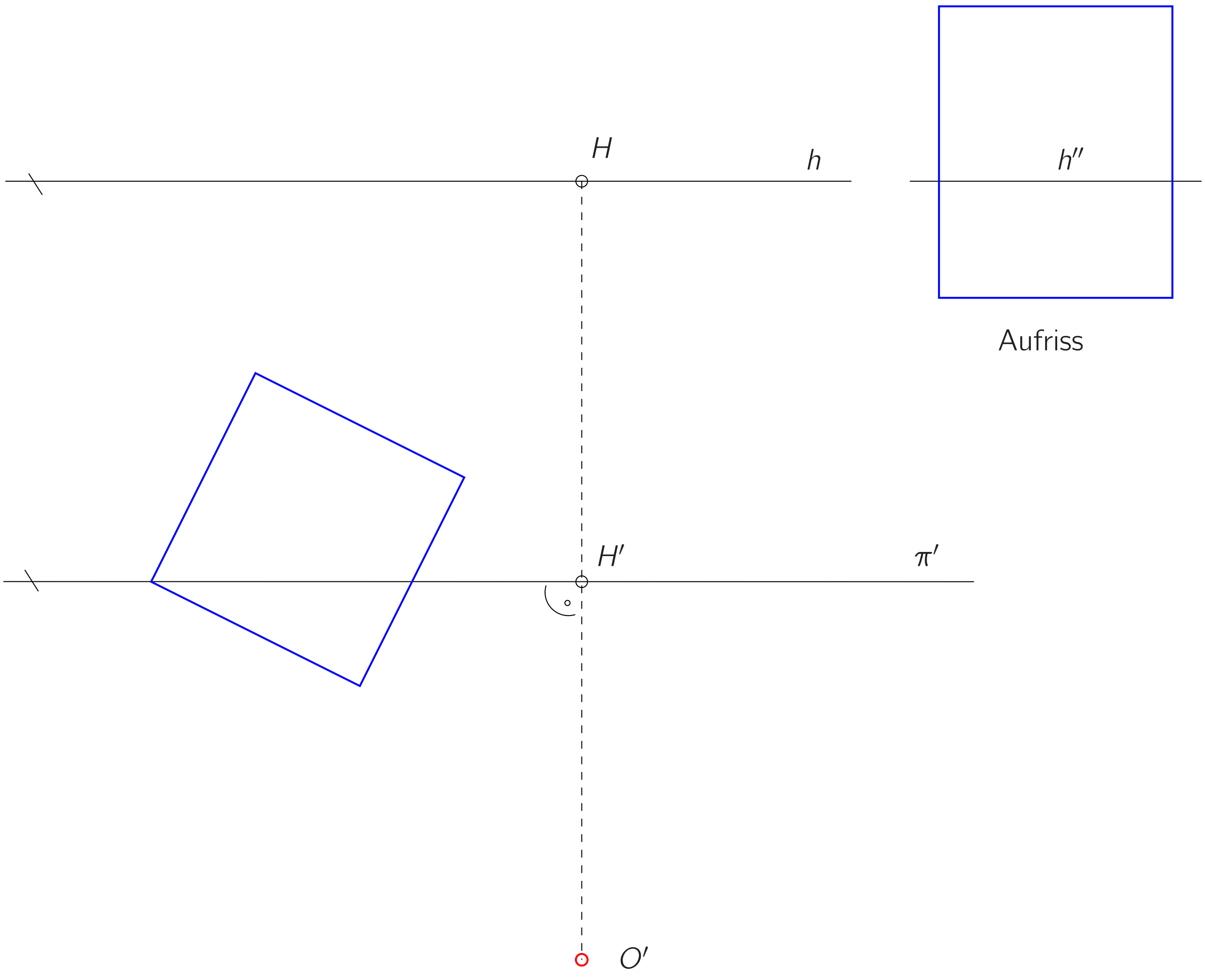


Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

Aufgabe 5.2 *Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung (Abb. 5.11). Verwende* Tiefenlinien *zur Konstruktion der Fahnenstange.*

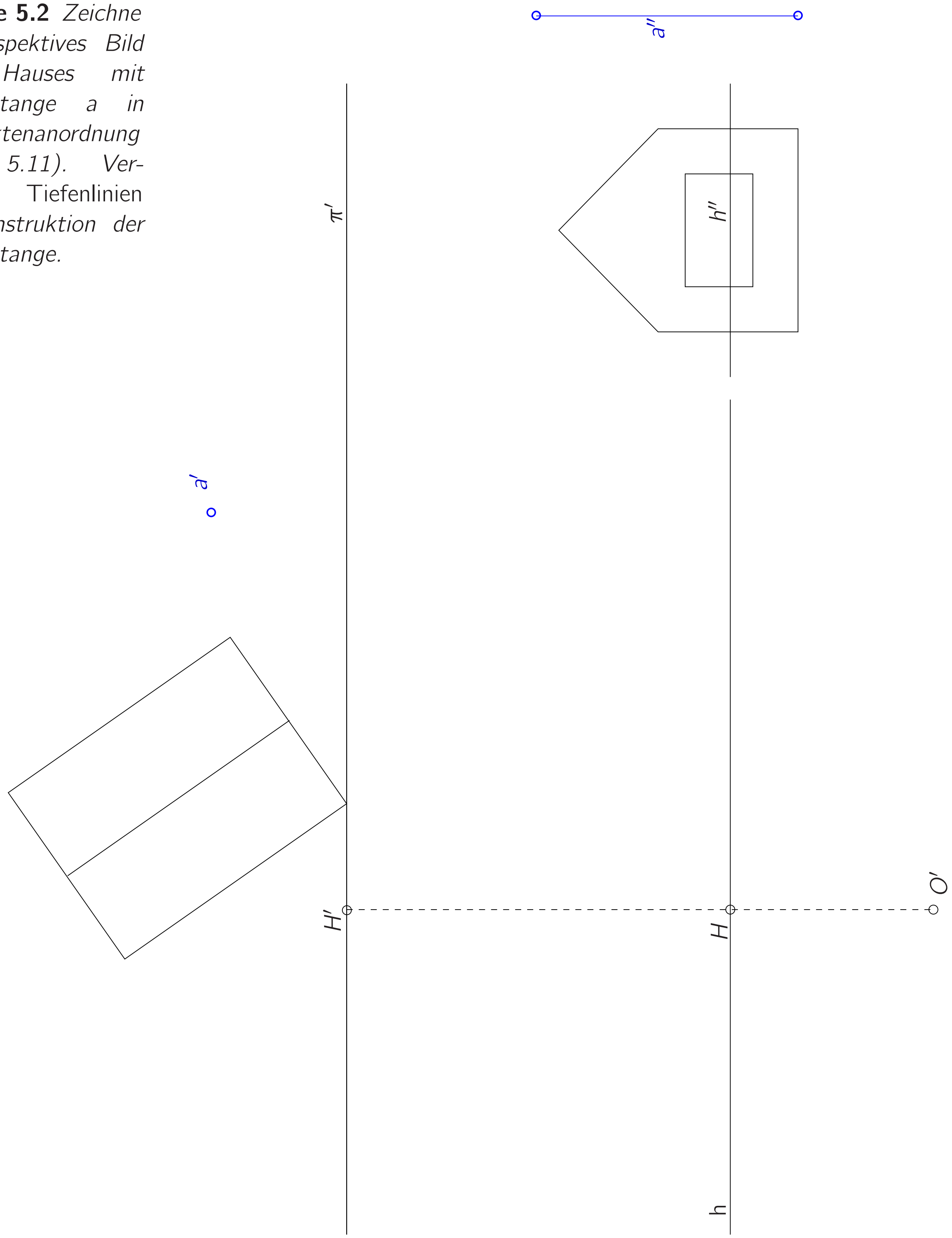


Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

5.4 Schattenkonstruktionen

(s. FKN S.251)

5.4.1 Schatten bei Parallelbeleuchtung

Aufgabe 5.3 *Konstruiere den Schatten eines Hauses auf der Standebene. Die Lichtrichtung sei durch den Pfeil l gegeben.*
Gehe im Prinzip wie bei Parallelprojektion vor (siehe 2.4). Verwende den Fluchtpunkt S der Sonnenstrahlen und den Fluchtpunkt S_F der Grundrisse der Sonnenstrahlen.

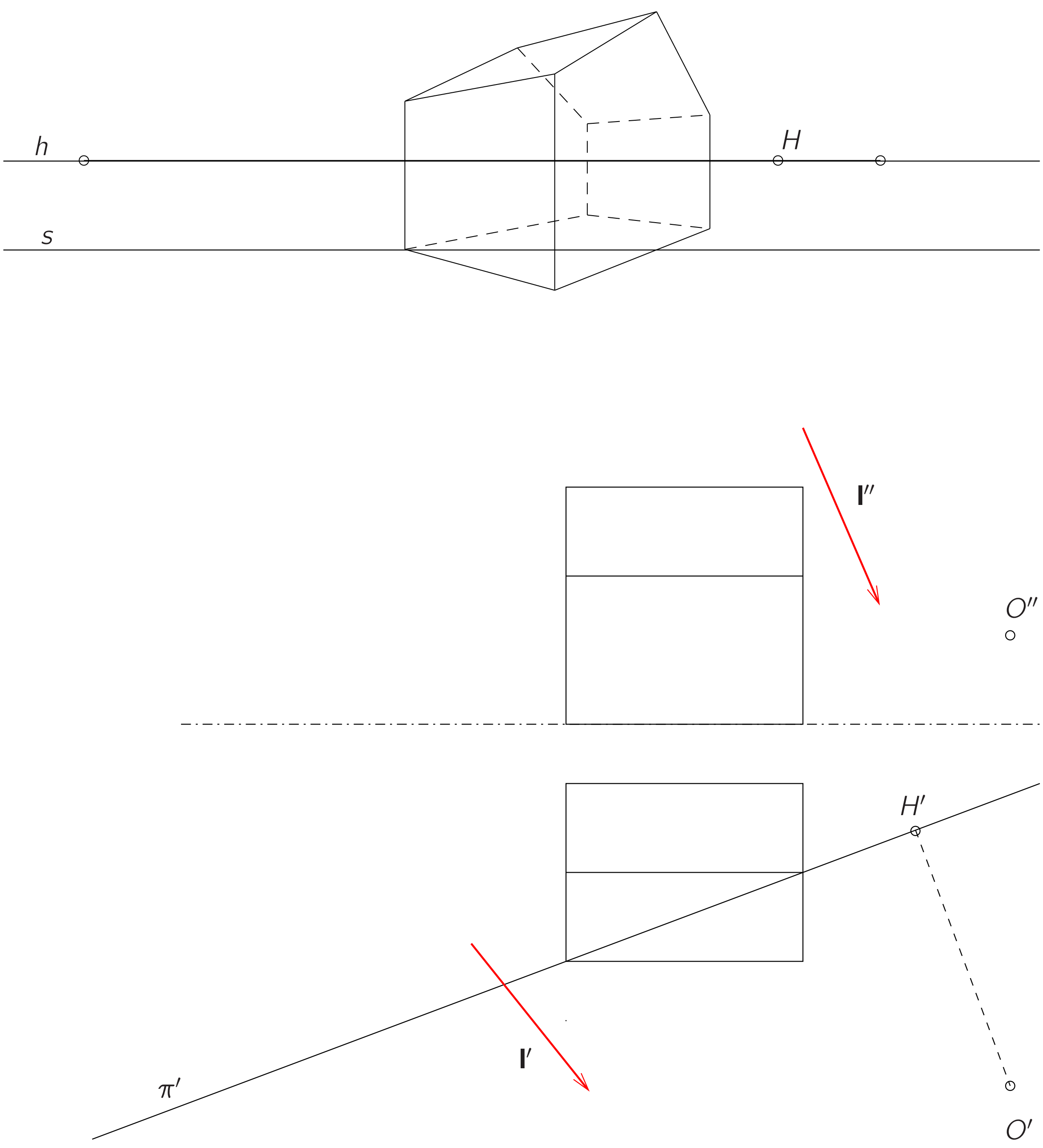


Abbildung 5.12: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

5.4.2 Schatten bei Zentralbeleuchtung

Aufgabe 5.4 *Konstruiere den Schatten eines Hauses auf der Standebene.*
Die Lichtquelle ist durch den Punkt L gegeben. Gehe im Prinzip wie bei Parallelprojektion vor (s. 2.4).

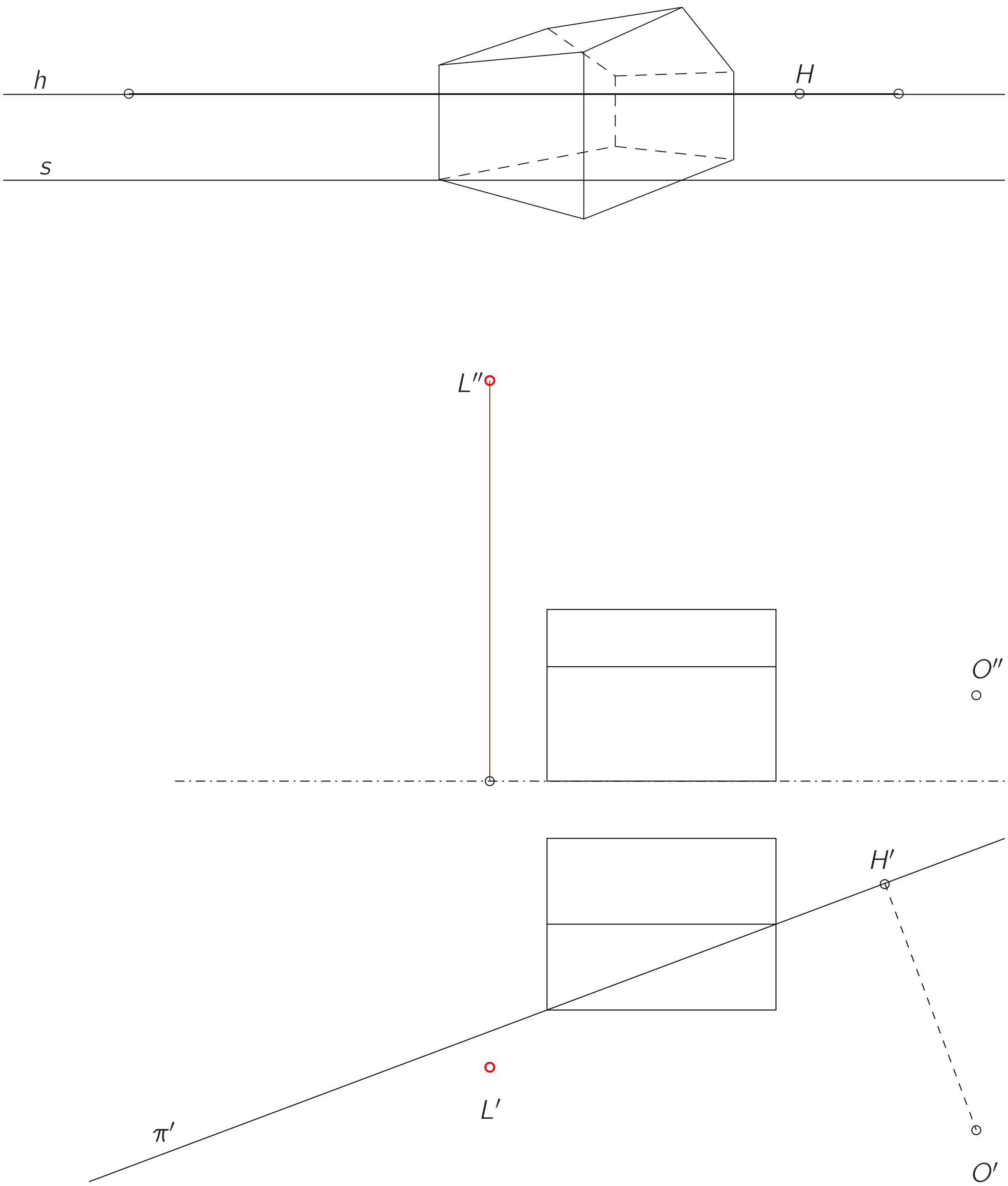


Abbildung 5.13: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

Aufgabe 5.5 *Konstruiere den Schatten eines Hauses und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei parallelem Licht, gegeben durch S und S_F.*
(Bei der Konstruktion des **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch P, P' und Lichtrichtung mit Hauswand/Dach.)*

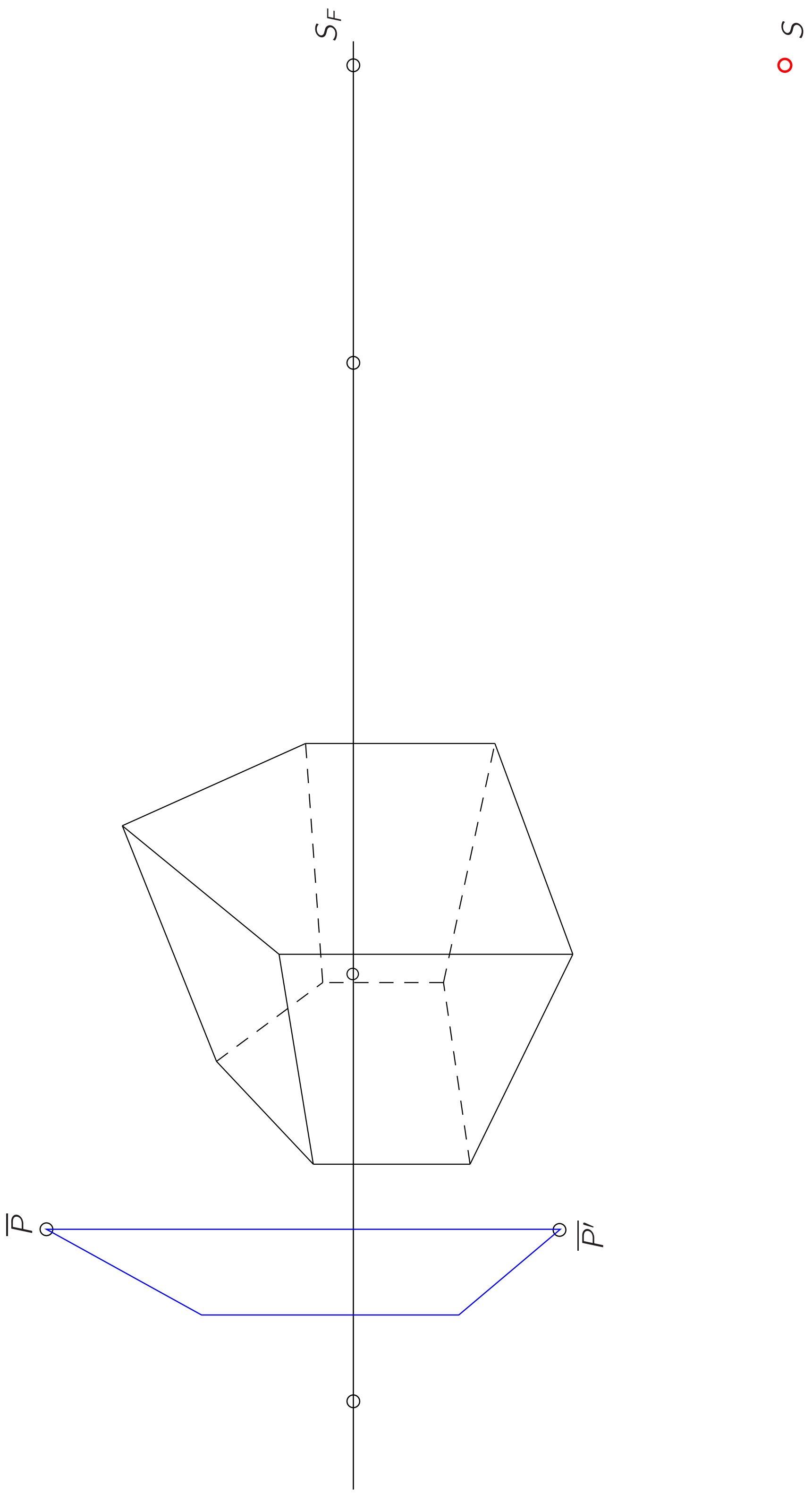


Abbildung 5.14: Schatten eines Hauses und einer Reklametafel bei parallelem Licht

5.5 Rekonstruktion (s. LEO S.242)

Bisher sind wir von einem in Grund– und Aufriss gegebenen Objekt ausgegangen und haben dazu das perspektive Bild konstruiert. Nun soll die umgekehrte Aufgabe behandelt werden: Es ist ein perspektives Bild (z. B. eine Photographie) gegeben und es sollen **wahre Abmessungen** von Figuren des perspektiven Bildes bestimmt werden. Diese Aufgabe ist nur mit Hilfe weiterer Informationen möglich.

Wir machen daher in diesem Abschnitt stets die folgenden **Annahmen**:
Es sei ein perspektives Bild mit senkrechter Bildtafel gegeben und

Horizont h, **Hauptpunkt** H, **Standlinie** s und **Distanz** d

seien bekannt. Beispielsweise ist in Abbildung 5.15 das perspektive Bild eines Hauses gegeben; die wahren Abmessungen sind gesucht, siehe Aufgabe 5.8.

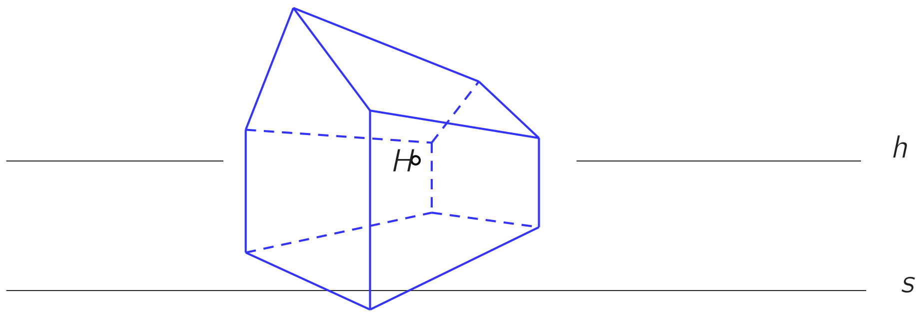


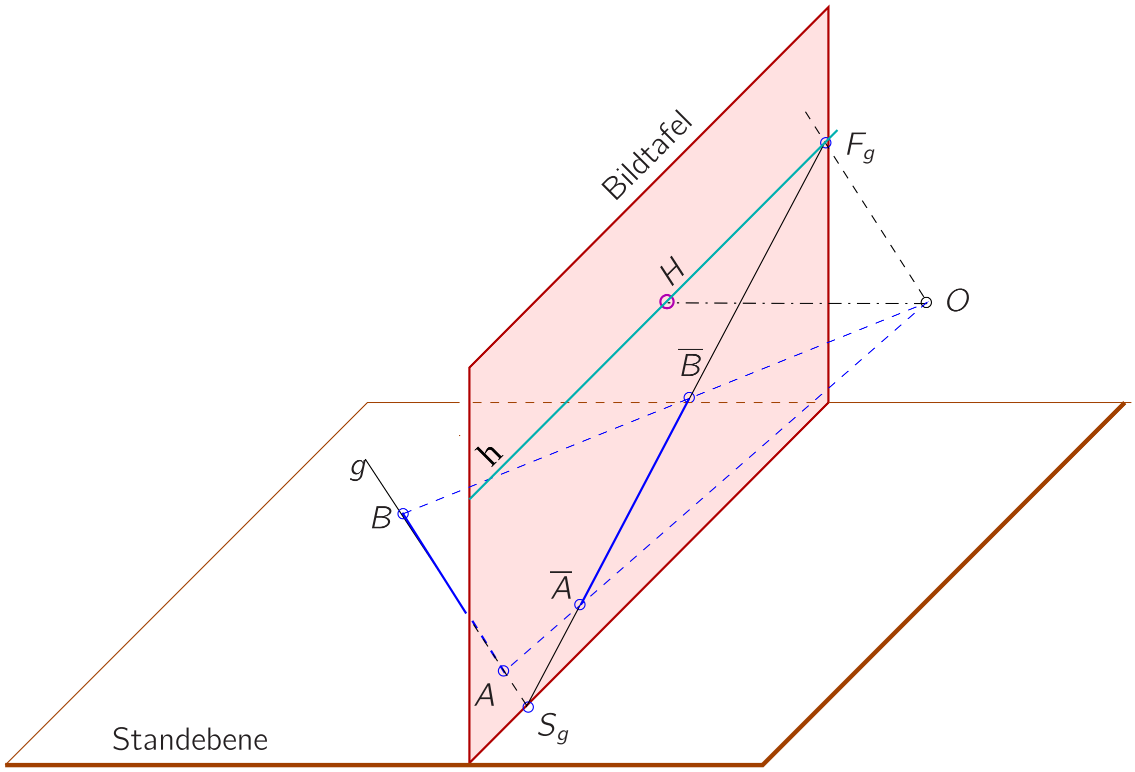
Abbildung 5.15: Beispiel zu wahre Abmessungen eines Hauses

5.5.1 Wahre Längen und Messpunkt (s. LEO S.242)

Gegeben: das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden g.
Gesucht: die wahre Länge der Strecke.

Bei der Zweitafelprojektion haben wir die Strecke, deren wahre Länge bestimmt werden soll, parallel zu einer der Risstafeln gedreht und konnten dann die wahre Länge in der anderen Risstafel ablesen. Bei Zentralprojektion genügt das Paralleldrehen zur Bildtafel nicht, da bei dieser Projektion Längen in Ebenen parallel zur Bildtafel immer noch verzerrt sind. Man muss also eine Drehung finden, so dass die gedrehte Strecke sogar in der Bildebene selbst liegt.

Idee für den Fall, dass die **Strecke in der Standebene** (Grundrissebene) liegt:
Man denkt sich die Strecke AB um den Spurpunkt S_g (der Geraden g durch A, B) mit senkrechter Drehachse in die Bildtafel auf die Standlinie s gedreht (s. Abb. 5.17). Da eine Drehung im perspektiven Bild nur schwer darstellbar ist, ist es einfacher, eine Parallelprojektion in die Bildebene zu betrachten, die genau dasselbe bewirkt. Den Fluchtpunkt der gesuchten Projektionsrichtung (also ihrer Projektionsstrahlen) nennt man **Messpunkt** M_g. Der Messpunkt ist demnach für alle zu AB parallelen Strecken gleich. Im Falle einer horizontalen Strecke, wie hier angenommen, liegt M_g auf dem Horizont. Er wird gemäß Abb. 5.17 bestimmt.



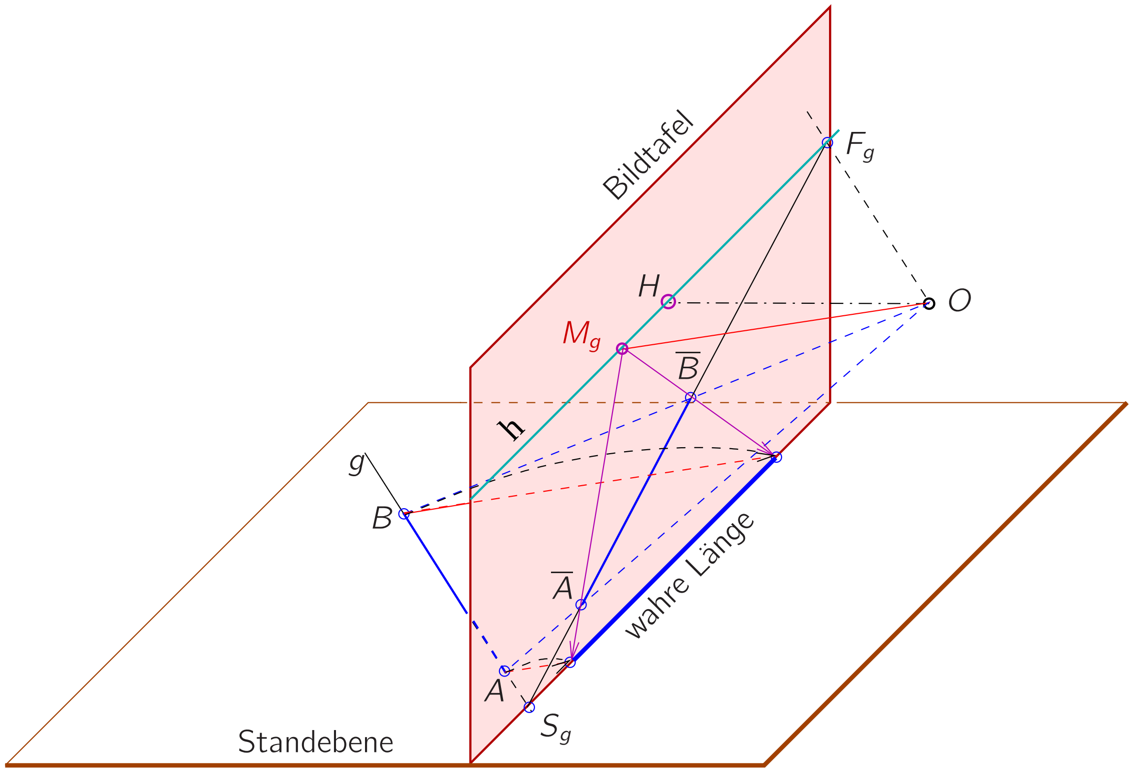


Abbildung 5.16: Idee zur Bestimmung der wahren Länge einer horizontalen Strecke

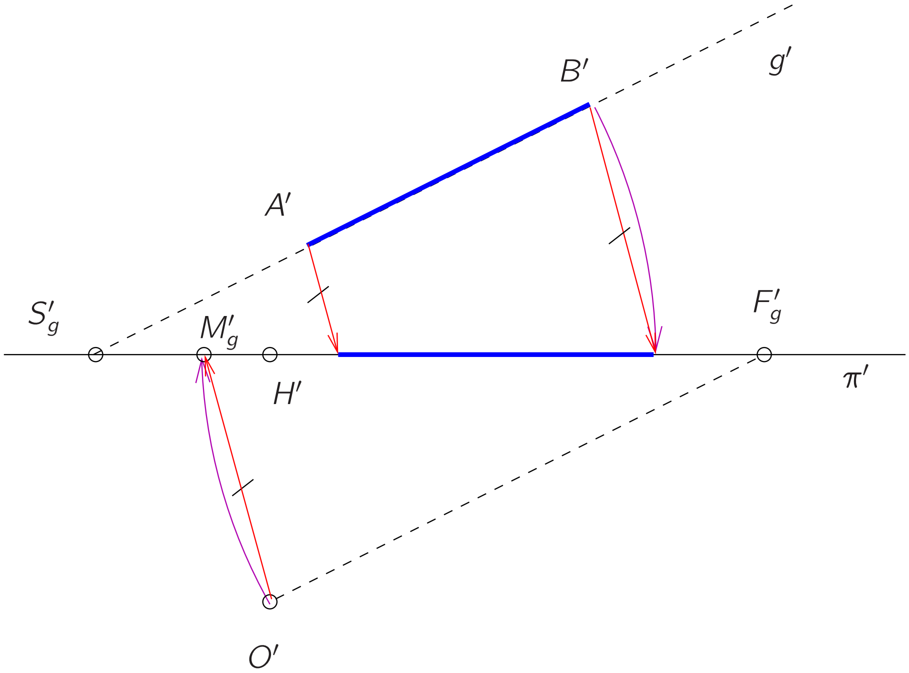


Abbildung 5.17: Bestimmung der wahren Länge einer horizontalen Strecke

Da wir aber den Grundriss nicht als bekannt voraussetzen, müssen wir den Messpunkt im perspektiven Bild bestimmen.

Durchführung für den Fall einer **horizontalen** Strecke in der **Standebene**:

1. Zeichne den Fluchtpunkt F_g der Geraden g.
2. Zeichne über oder unter dem Hauptpunkt im Abstand d (Distanz) O' und drehe O' um F_g auf den Horizont h. Dadurch erhält man den **Messpunkt** M_g.
3. Die Projektion der Strecke $\overline{AB}$ von M_g aus auf die Standlinie liefert die wahre Länge der Strecke.

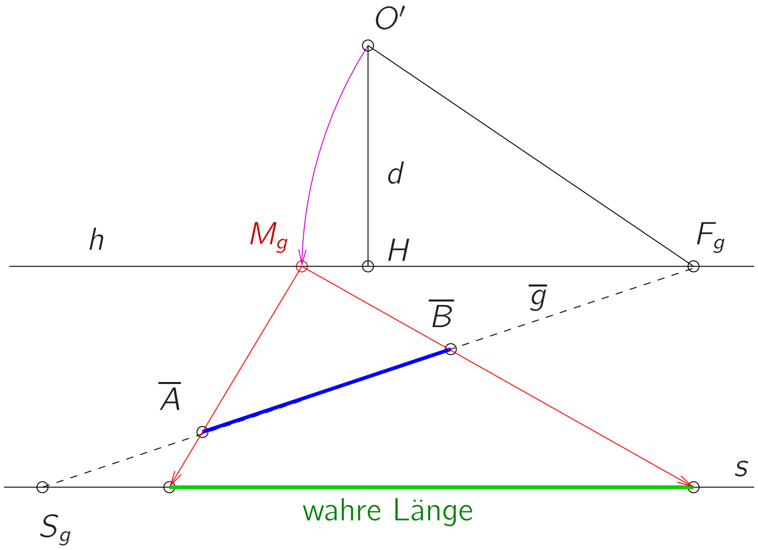


Abbildung 5.18: Bestimmung der wahren Länge einer Strecke

Aufgabe 5.6 *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.19 gegebenen Strecke, die in der Standebene liegt. Die Distanz sei $d = 4$cm.*

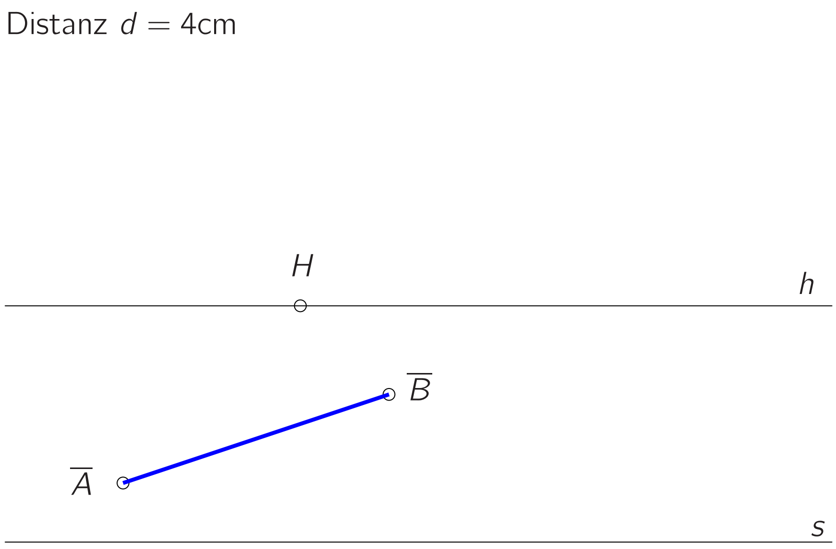


Abbildung 5.19: Bestimmung einer wahren horizontalen Länge

Falls die Strecke $\overline{AB}$ **parallel zur Bildtafel** liegt, ist es egal, welche Projektionsrichtung man benutzt: Jede Projektion führt zur gleichen Länge. Daher kann man den Messpunkt M_g in diesem Fall beliebig auf dem Horizont h wählen. Um die wahre Länge einer Geraden $\overline{AB}$ in der Standebene zu bestimmen wählt man also einen beliebigen Messpunkt $M_g \in h$ im Horizont und projiziert $\overline{AB}$ von M_g auf die Standlinie s, s. Abb. 5.19. Falls die Gerade nur in einer Ebene ε parallel zur Bildebene liegt, so muss man entsprechend auf die Spurgerade s_ε projizieren.

Aufgabe 5.7 *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.20 gegebenen Strecken, die parallel zur Bildtafel π sind. $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ liegen in der Standebene.*

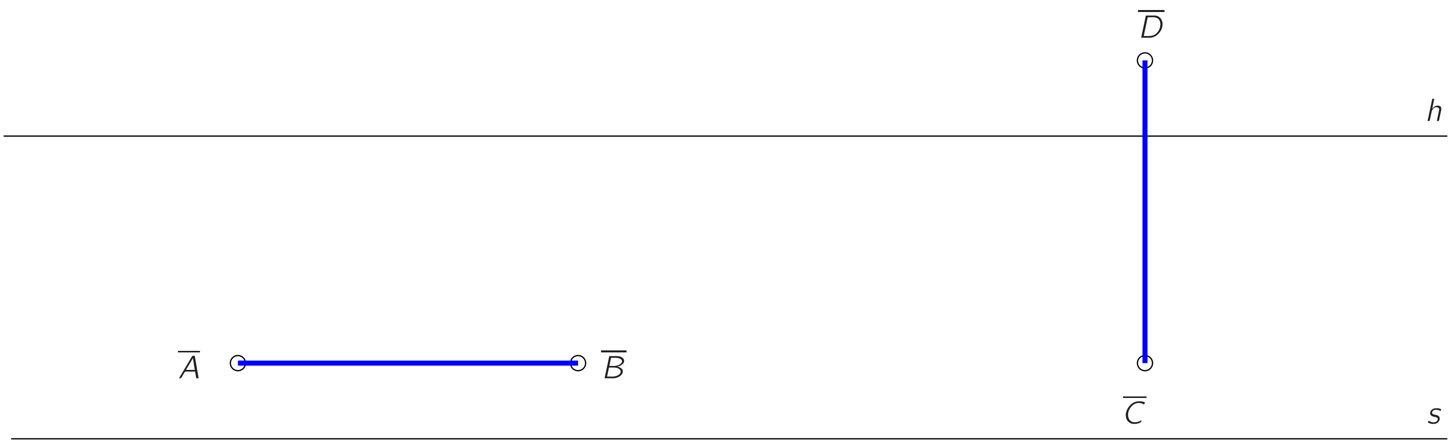


Abbildung 5.20: Bestimmung einer wahren horizontalen/senkrechten Länge: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ liegen in der Standebene

Aufgabe 5.8 *Bestimme die wahren Abmessungen des Hauses von Abb. 5.21 und ermittele die Distanz aus den horizontalen Fluchtpunkten mit Hilfe eines Thaleskreises. (Annahme: das Haus ist rechtwinklig.)*

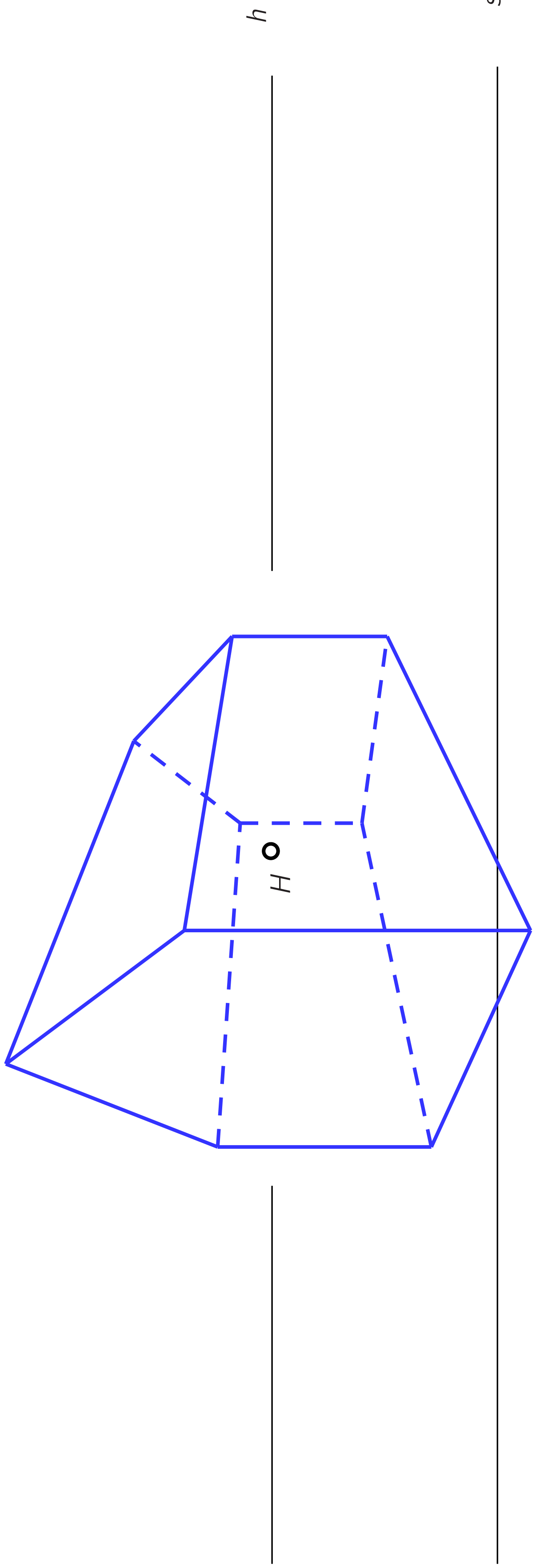


Abbildung 5.21: Bestimmung der wahren Abmessungen eines Hauses

Mit Hilfe des Messpunktes M_g einer Geraden g lässt sich auch auf g eine **wahre Länge antragen**.

Aufgabe 5.9 *Ergänze in dem perspektiven Bild eines Hauses eine Tür links von dem Punkt A. Breite der Tür: 3cm, Höhe: 4cm. Füge senkrecht zu dem vorhandenen Haus rechts hinten einen Anbau mit derselben Traufhöhe, der Firsthöhe 9cm, Breite 8cm, Länge 6cm hinzu.*

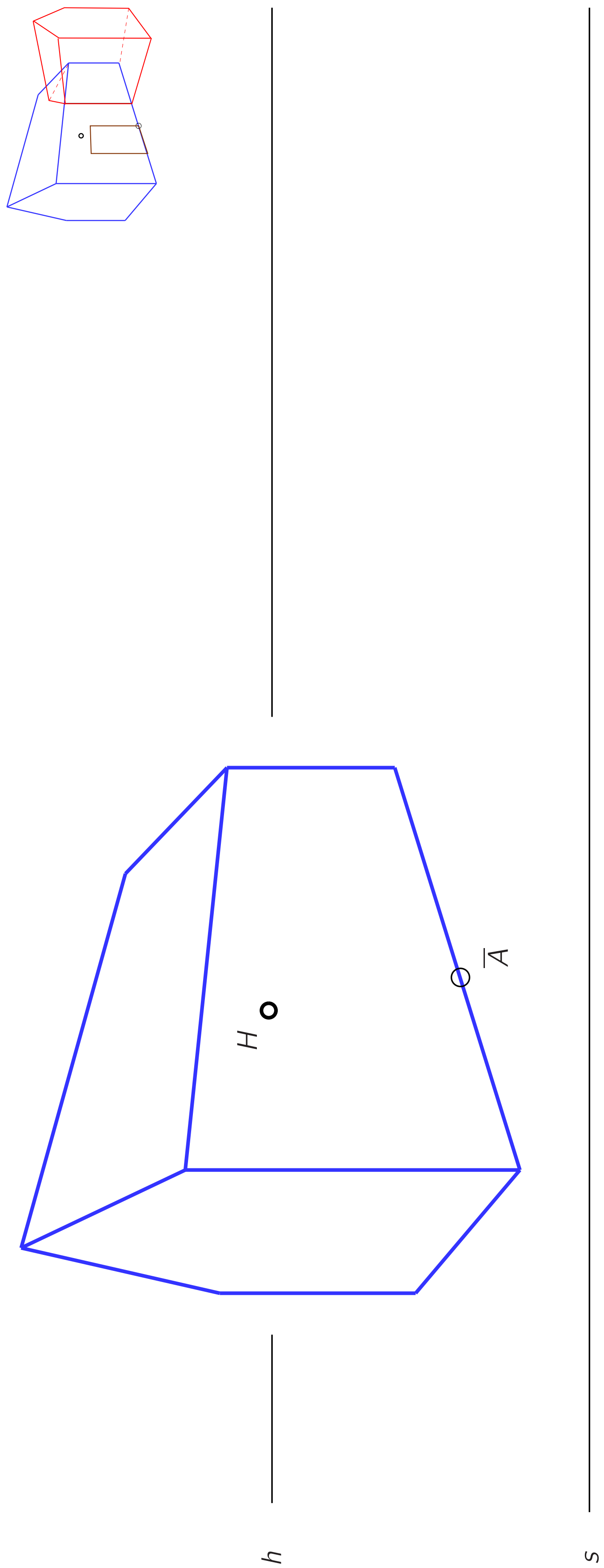


Abbildung 5.22: Antragen wahrer Längen: Tür und Anbau

5.5.2 Rekonstruktion von Grund- und Aufriss

Man kann aus einer Perspektive auch Grund- und Aufriss gewinnen. Bei gegebener Perspektive ist insbesondere die Lage des Augpunktes und der Bildtafel relativ zu dem Objekt, das abgebildet wird, gesucht. Daher spricht man bei dieser Aufgabe auch davon, die **äußere Orientierung** einer Zentralprojektion zu bestimmen.

Die Grundidee zur Lösung ist einfach: Man kehrt die in Abschnitt 5.3 beschriebene "Architektenanordnung" um.

Durchführung:

1. Zeichne unter– oder oberhalb des perspektiven Bildes eine Parallele π' zum Horizont h. π' ist der Grundriss der **Bildtafel** (Architektenanordnung !).
2. Übertrage den **Hauptpunkt** H und alle notwendigen **Fluchtpunkte** in den Grundriss. Der Grundriss O' des **Augpunkt**es liegt auf dem Lot zu π' in H' im Abstand d , der **Distanz**.
3. **Rekonstruktion** einer **Gerade**, die in der Standebene liegt:
   Bestimme (falls nicht schon in 2. geschehen) die Grundrisse F_g', S_g' des Flucht– bzw. Spurpunktes der Geraden g. g' ist dann eine Parallele zu $O'F_g'$ durch S_g'.
4. **Rekonstruktion** eines **Punktes** P, der in der Standebene liegt:
   Zeichne $\overline{P'}$ mit Hilfe des Lotes von $\overline{P}$ auf π' und den Grundriss des Projektionsstrahls (Gerade $O'\overline{P'}$).
   Mit Hilfe des Grundrisses einer weiteren Gerade durch P (z.B. Tiefenlinien oder Hauskanten,...) erhält man schließlich P'.
5. Ein Punkt, der nicht in der Standebene liegt, lässt sich analog rekonstruieren, falls sein Grundriss im perspektiven Bild bekannt oder konstruierbar ist. Die Höhe eines solchen Punktes erhält man über deren "wahre Länge" (s. Anfang dieses Abschnitts).

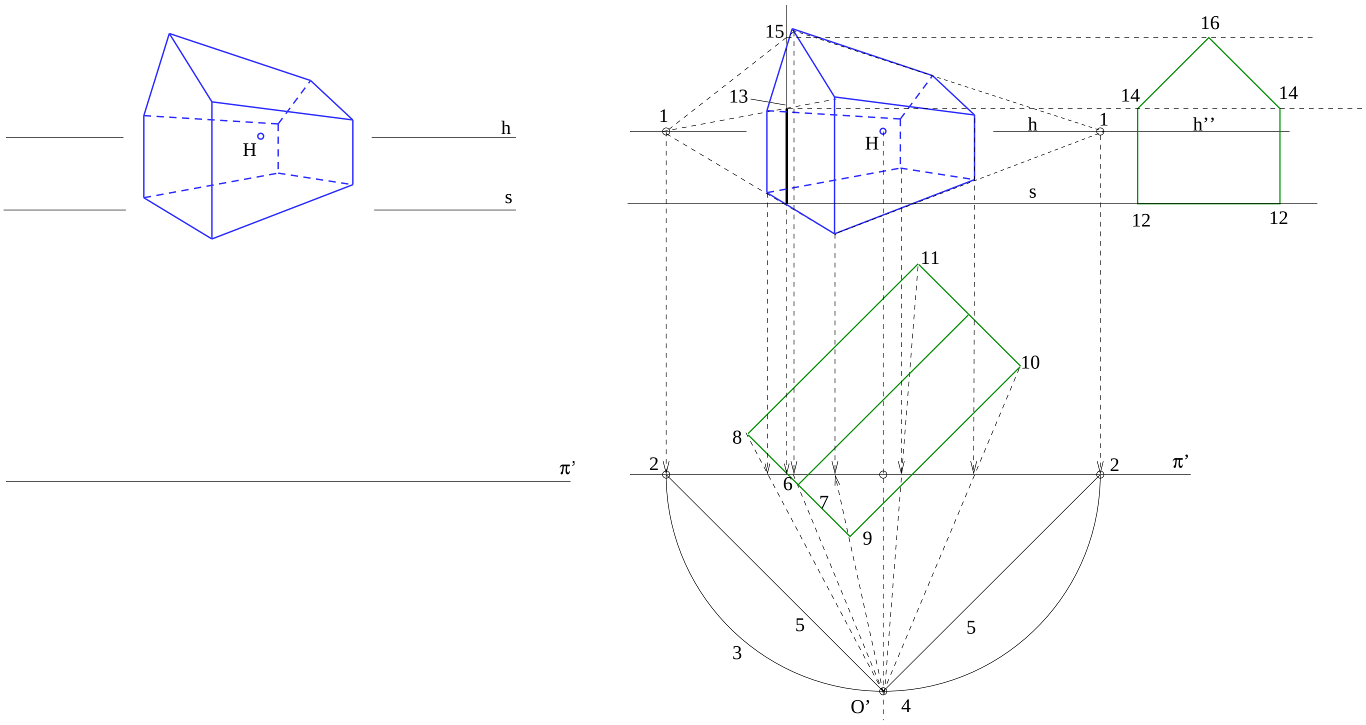


Abbildung 5.23: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses: Lösungsschritte 1–16

Aufgabe 5.10 *Rekonstruiere Grund- und Aufriss eines Hauses* konstruiere *einen Anbau (analog zu Aufgabe 5.9) der Breite 3cm, Traufhöhe wie das gegebene Haus und der Firsthöhe 4cm.*

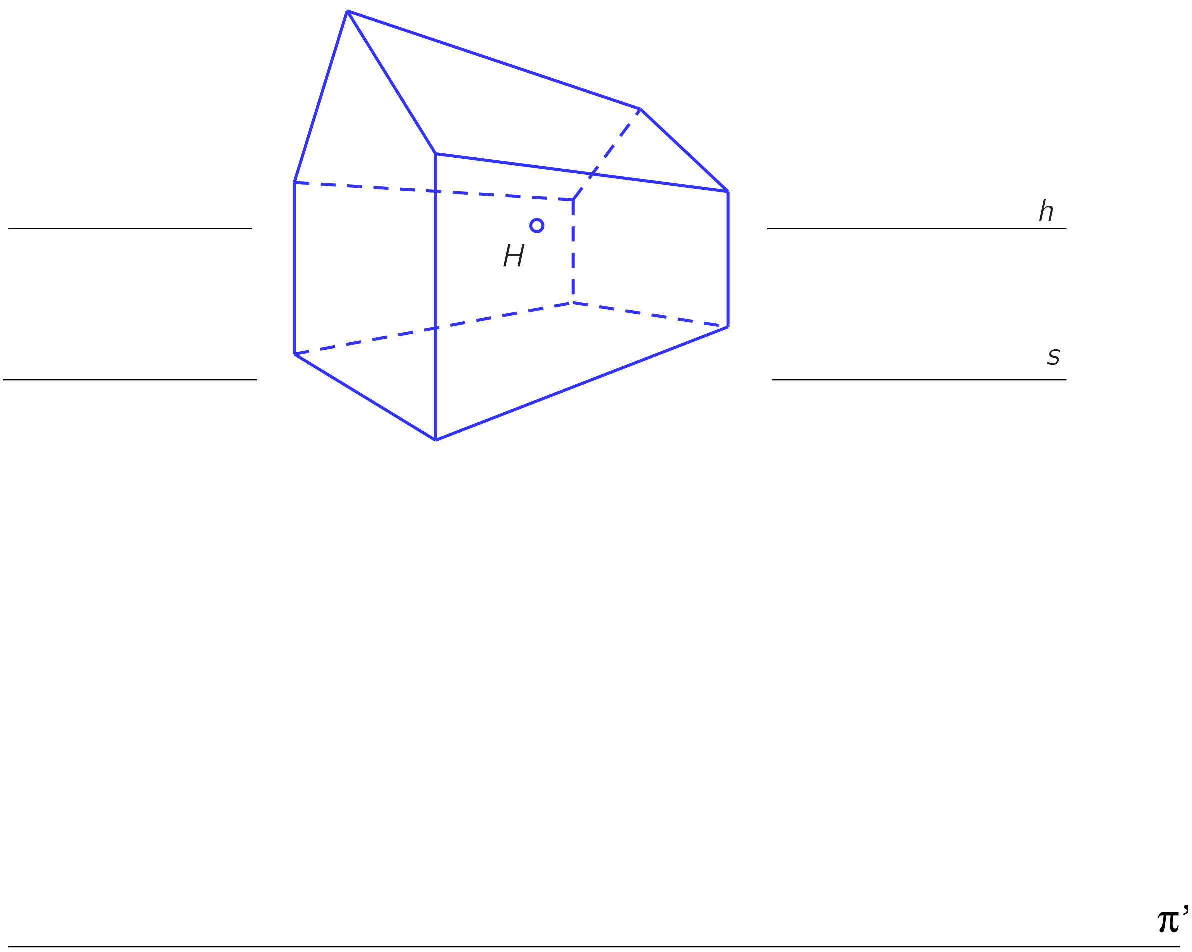


Abbildung 5.24: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses

5.5.3 Rekonstruktion einer Frontalperspektive

Wir wollen den Grundriss des in Abb. 5.25 in Frontalperspektive dargestellten U-förmigen Gebäudes bestimmen. Dabei nehmen wir wieder an, dass das Gebäude nur rechte Winkel besitzt. Die Rekonstruktion kann natürlich nur bis auf den Maßstab möglich sein; tatsächlich benötigt man sogar zwei Maßstäbe, die nicht aus dem Bild ersichtlich sind.

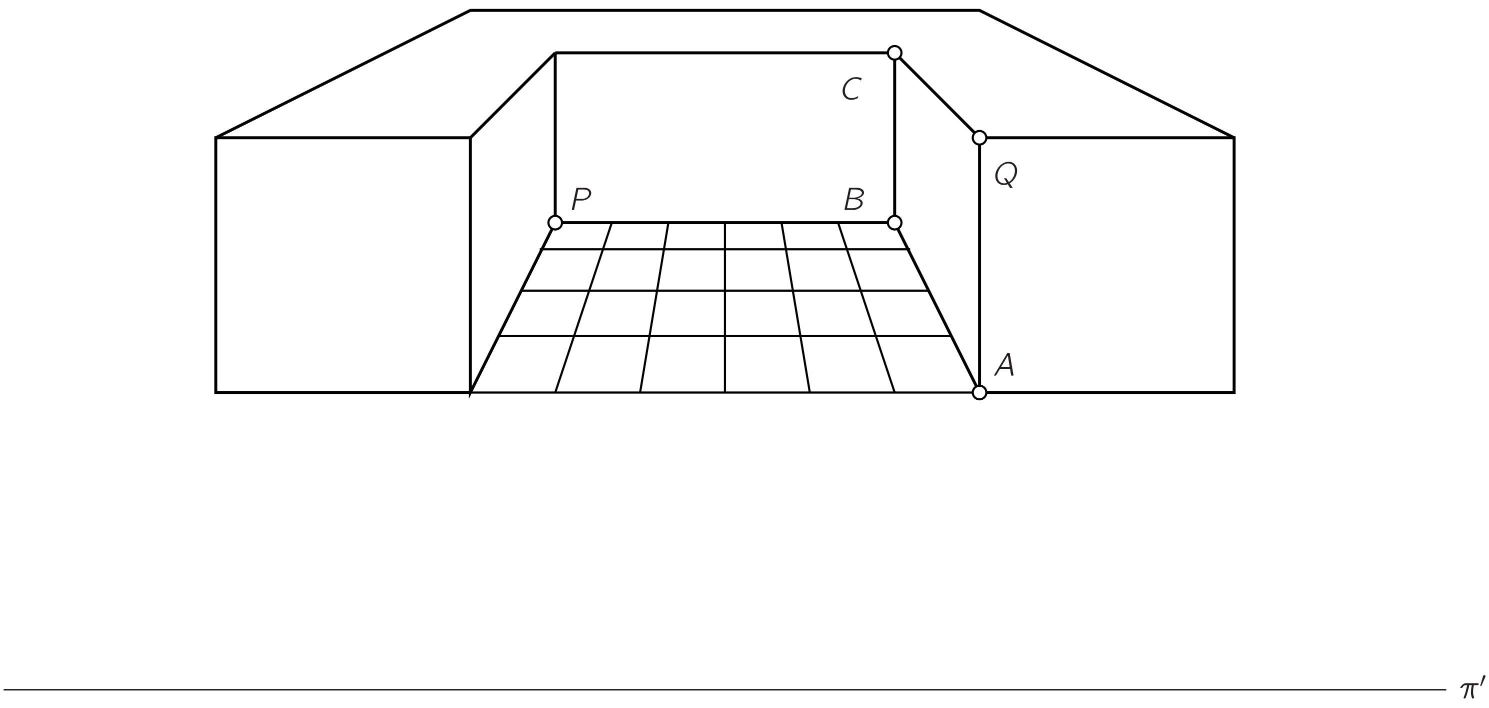


Abbildung 5.25: Rekonstruktion des Grundrisses aus einer Frontalperspektive

Die Bezeichnung *Frontalperspektive* bezieht sich auf eine Perspektive bei der rechtwinklige Objekte mit nur einem Fluchpunkt abgebildet werden. Dieser Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt, und die in ihn laufenden Linien sind Tiefenlinien des Originals. Alle anderen Linien sind parallel zur Bildebene. Im Gegensatz dazu wird eine Perspektive mit zwei Fluchtpunkten auch als *Perspektive über Eck* bezeichnet. Natürlich lassen sich diese Perspektivtypen nur unterscheiden, wenn das dargestellte Objekt drei Scharen von aufeinander senkrechten Geraden besitzt.
Bei einer Frontalperspektive ist der Hauptpunkt der Fluchtpunkt. Die Distanz, also der Abstand des Augpunkts von der Bildebene π, ist damit aber noch nicht bestimmt. Dies bedeutet, dass wir das Verhältnis von Tiefen zu Breiten aus einer Frontalperspektive nicht ablesen können. Beispielsweise geht aus Abb. 5.25 das Seitenverhältnis des Innenhofes nicht hervor. Kennt man dieses aber, so kann man den Grundriss bis auf Maßstab rekonstruieren.
Oftmals enthält ein Foto Objekte, von denen man das Seitenverhältnis kennt: In Abb. 5.25 weiß man vielleicht, dass die im Innenhof angedeuteten Platten quadratisch sind; in anderen Fällen sieht man möglicherweise liegende Kreise, aus denen man ebenfalls ein Seitenverhältnis ablesen kann. Wir können dann wie im Fall von zwei Fluchtpunkten vorgehen:

Durchführung:

- Scharen von Diagonalen der Platten sind parallel. Sie besitzen daher zwei Fluchtpunkte $F_1, F_2 \in \pi$. Wir verbinden sie und erhalten den Horizont h, auf dem wir auch noch den Hauptpunkt H als Fluchtpunkt eintragen.
- Wir tragen auf π' die Punkte F_1, F_2, H ab. Weil die Diagonalen aufeinander rechtwinklig stehen, konstruieren wir O' wieder im Thaleskreis durch ${F_1}', {F_2}'$ Genausogut kann man O' als Schnitt der beiden Fluchtpunktgeraden durch ${F_1}'$, ${F_2}'$ bestimmen, die π' im Winkel 45° schneiden.
- Nun konstruieren wir den Grundriss wieder in Umkehrung des Architektenverfahrens. Wir tragen einen Punkt beliebig auf seinem Sehstrahl ab. Beispielsweise verlangen wir $P \in \pi$. Die verbleibenden Punkte finden wir dann im Schnitt ihrer Sehstrahlen mit solchen Geraden durch bereits konstruierte Punkte, die parallel oder senkrecht zu π' sind.

Beachten Sie auch, dass im vorliegenden Fall das rechtwinkelige Dreieck F_1', F_2', O' gleichschenkelig ist; daher ist der Abstand der beiden Diagonalenfluchtpunkte vom Hauptpunkt genau *die* Distanz $|\overline{HO}|$. Bei einer Frontalperspektive nennt man daher die Diagonalenfluchtpunkte auch *Distanzpunkte*.

Wie würden wir vorgehen, wenn die Platten ein anderes Seitenverhältnis haben? Wenn sich die Diagonalen im Winkel α schneiden, so müßten wir O' so bestimmen, dass von O' aus gesehen die beiden Fluchtpunkte den Winkel α einschließen.
Als Maßaufgabe wollen wir nun noch aus einem bekannten Grundriss-Maßstab die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ bestimmen. Beispielsweise sei der Maßstab so, dass die Platten $2m$ Kantenlänge haben. Wir zerlegen $\overline{PQ}$ in die horizontale Strecke $\overline{PA}$ und die vertikale Strecke $\overline{AQ}$. Die horizontale Länge liest man als $|\overline{PA}| = \sqrt{12^2 + 8^2}\, m = \sqrt{208}\, m$ aus dem Grundriss ab. Die Höhe $|\overline{AQ}|$ ermitteln wir durch Projektion nach π: $|\overline{AQ}| = |\overline{BC}|$. Weil die Strecke $\overline{BC}$ in der Perspektive in wahrer Länge erscheint, ist ihre Länge im Maßstab des Grundrisses abgebildet; sie beträgt daher $6m$. Wir erhalten insgesamt $|\overline{PQ}| = \sqrt{208 + 6^2}\, m = \sqrt{244}\, m \approx 15,6m$.

5.6 Perspektive bei geneigter Bildtafel

Bei der Projektion auf eine geneigte Bildtafel liegt der Fluchtpunkt der Vertikalen im „Endlichen“, d.h. die Bilder senkrechter Geraden sind jetzt nicht mehr parallel (wie es bei senkrechter Bildtafel der Fall war).
Die Grund**idee** zur Konstruktion eines perspektiven Bildes bei geneigter Bildtafel ist die gleiche wie im Fall einer senkrechten Bildtafel. Man konstruiert das Bild mit Hilfe von Grund- und Aufriss und den Fluchtpunkten.

Gegeben: a) QUADER in Grund- und Aufriss
b) Augpunkt O in Grund- und Aufriss
c) Bildtafel durch die Standlinie s (Schnitt mit der Grundrisstafel) und den Horizont h in Grund- und Aufriss.

Gesucht: das perspektive Bild des Quaders.

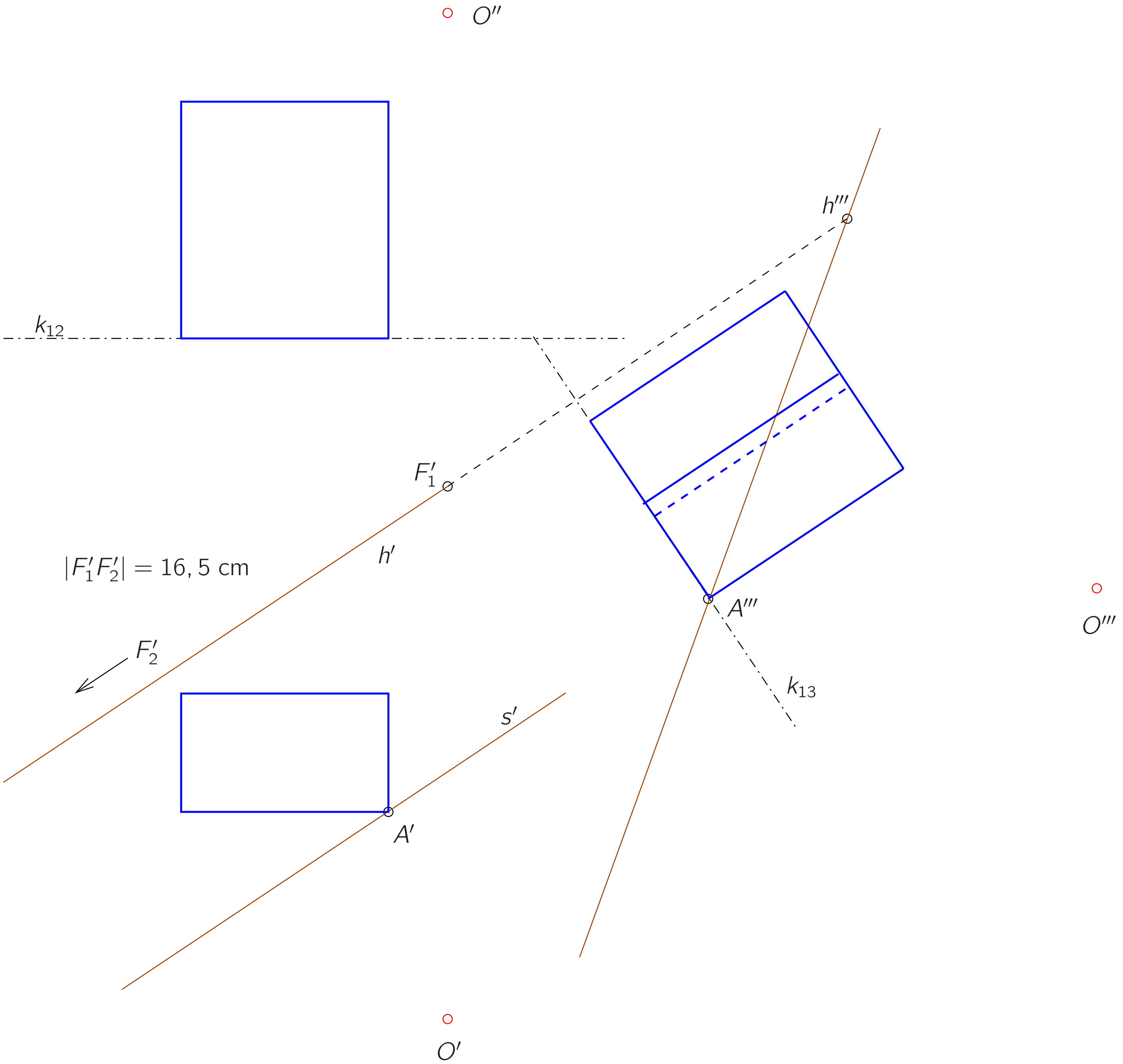


Abbildung 5.26: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel

Durchführung:

1. Zeichne einen neuen **Seitenriss**, in dem die Bildtafel π (der Zentralprojektion) projizierend ist. Die Bildtafel erscheint dann als Gerade.
2. Bestimme den Hauptpunkt H und die drei wesentlichen **Fluchtpunkte** F_1, F_2, F_3 in den Risstafeln π_1, π_3.
3. Übertrage das **Fluchtpunktdreieck** auf die Zeichenfläche, auf der das perspektive Bild entstehen soll. (Die Gerade $\overline{F_1 F_2}$ ist der Horizont h. Der Abstand von F_3 zu h ergibt sich aus dem Seitenriss, den „seitlichen" Abstand von F_3 zu F_1 (oder F_2) erhält man aus dem Grundriss.)
4. Der **Hauptpunkt** ist der Schnittpunkt der Höhen im Fluchtpunktdreieck.
5. Übertragen eines Punktes, z.B. Punkt A.
   (Abstand vom Horizont aus π_3, Abstand von $\overline{HF}_3$ aus π_1.)
6. "**Fluchten**" von A auf F_1, F_2, F_3.
7. Zeichnen der Bilder der **vertikalen Kanten** mit Hilfe der Fluchtpunkte und der Durchstoßpunkte K_1, K_2, K_3, K_4 der Kanten mit der horizontalen Ebene durch den Augpunkt (und Horizont). Die Bilder von K_1, K_2, K_3, K_4 liegen auf dem Horizont h !
8. Mit Hilfe des Spurpunktes einer Deckelgeraden findet man die restlichen Punkte.

h

Abbildung 5.27: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Forts.

Auch bei geneigter Bildtafel bringt **Architektenanordnung** wesentliche Erleichterungen:
Die Konstruktion erfolgt mit einer Bildebene in zwei Stellungen:

(1) geneigte Stellung der Bildebene, in welcher das Bild entsteht;

(2) senkrechte Stellung, in welche die Bildebene anschliessend gedreht wird.

Die Drehachse ist der Horizont.
Alle Projektionen **im Grundriss** gelten nur für die **Horizonthöhe**

Konstruktion eines Bildpunktes:

(1) Die Grundrissprojektion wird auf den Horizont gelotet und von dort die Fluchtlinie nach F_3 gezeichnet. Diese Fluchtlinie ist das Bild der Senkrechten, auf welcher der Punkt liegen muss.

(2) Im Seitenriss wird durch Projektion auf die geneigte Bildebene und anschließende Drehung die Höhe bestimmt.

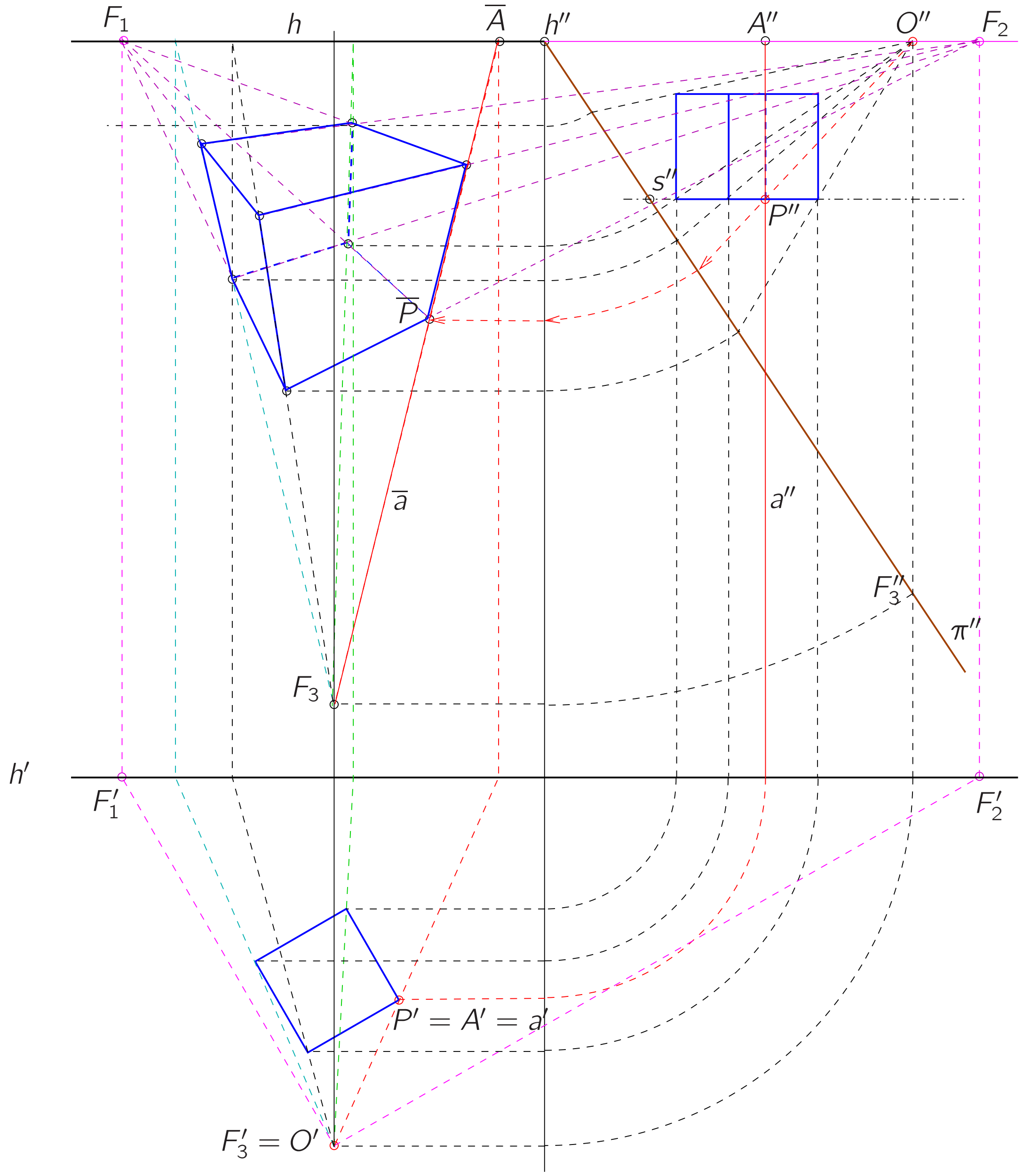


Abbildung 5.28: Zentralprojektion eines Quaders bei geneigter Bildtafel: Lösung

Aufgabe 5.11 *Zeichne den Quader in Architektenanordnung (geneigte Bildtafel)*

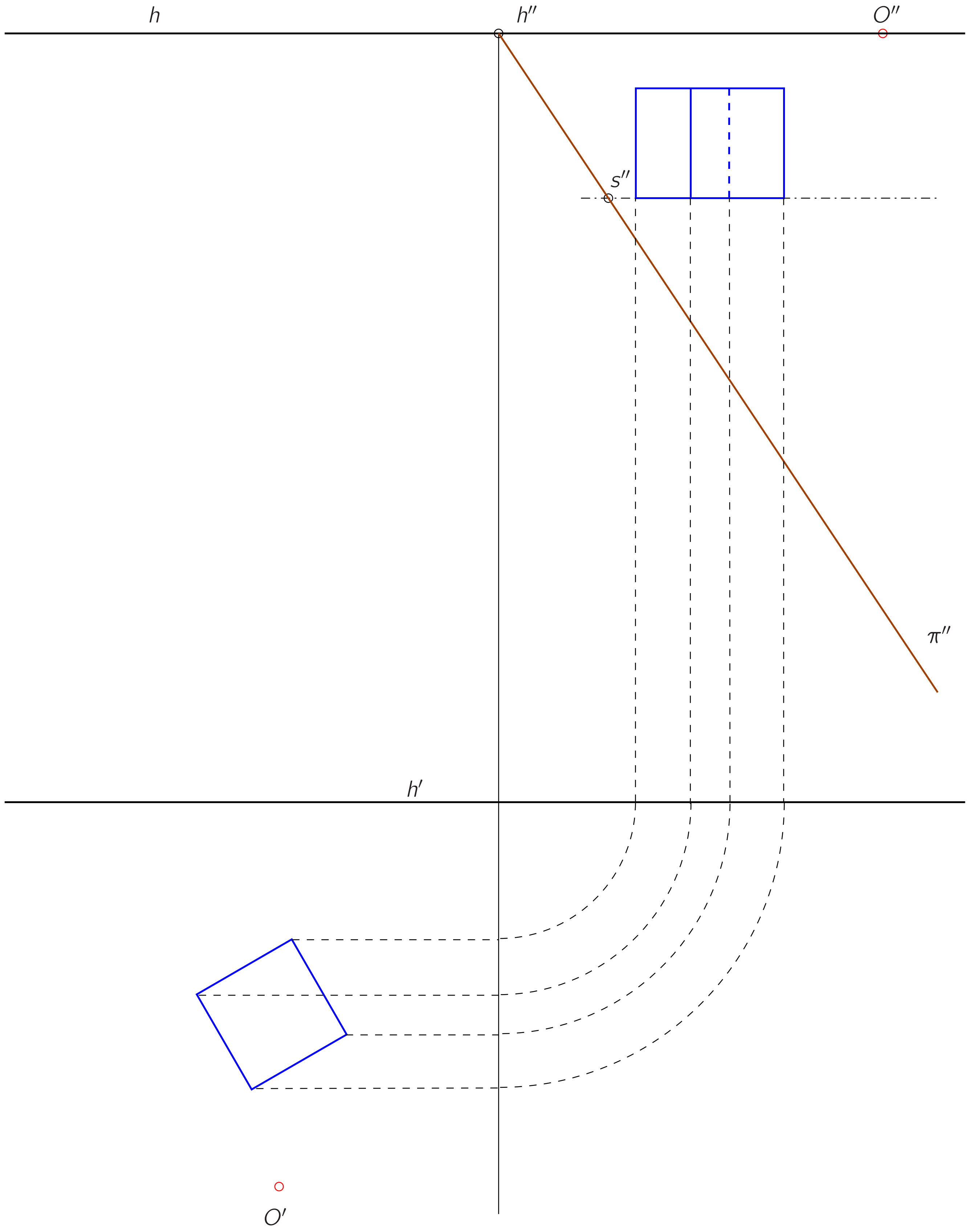


Abbildung 5.29: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Architekten-Anordnung

Aufgabe 5.12 *Zeichne den Turm in Architektenanordnung (geneigte Bildtafel)*

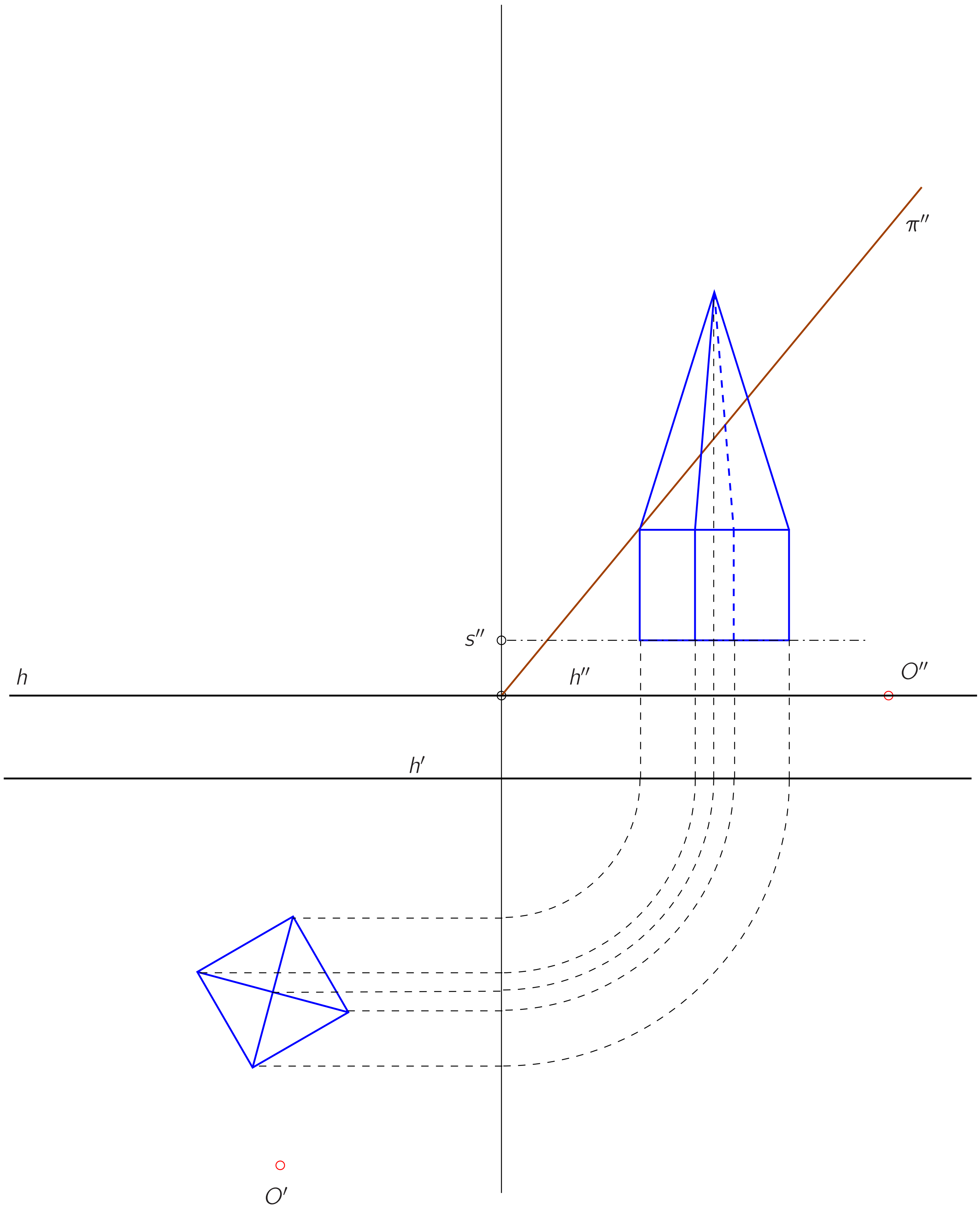


Abbildung 5.30: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Turm