Differentialgeometrie für Vermessungswesen

Julia Plehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Geometrie und Approximation

Inhaltsverzeichnis

Informationsblatt

Veranstalterin

Julia Plehnert
Gebäude S2-15, Raum 308
Telefon: 06151 - 16 2689
email: plehnert@mathematik.tu-darmstadt.de

Ort und Zeit

Vorlesung: Montags 13:30-15:10 Uhr
Übung: Mittwochs 8:55-10:35 Uhr
L5-01 Raum 342

Leistungsnachweis

Die unbenotete Studienleistung in Differentialgeometrie und ellipsoidischer Geodäsie wird durch die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen und das Bestehen der Klausur am Ende des Semesters erworben.

Im Bereich Differentialgeometrie benötigen Sie 70% der erreichbaren Hausübungspunkte für die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen.

Literatur

[B] Bär, Christian: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter, 2001.

[C] Carmo, Manfredo P. do: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg, 1983.

[EJ] Eschenburg, J.-H. und Jost, J.: Differentialgeometrie und Minimalflächen, 2. Aufl. Springer 2007.

[Kü] Kühnel, Wolfgang: Differentialgeometrie, Vieweg, 1999.

1 Kurven

`1. Vorlesung, Montag 18.10.10`

Die klassische Differentialgeometrie untersucht Eigenschaften von Kurven und Flächen in der Ebene bzw. im Raum. Wir werden die Vorlesung mit einer kurzen Wiederholung der analytischen Geometrie beginnen. Damit sind wir gut gerüstet, um in die lokale Kurventheorie einzusteigen. Dem Studium der ebenen Kurven folgt ein Abschnitt über Raumkurven.

Im zweiten Teil der Vorlesung wenden wir uns der Flächentheorie zu, dabei lernen wir verschiedene Krümmungsbegriffe kennen. Die Vorlesung schließt mit einem Kapitel über Kartennetzentwürfe. In allen Kapiteln wird großer Wert auf Anschaulichkeit gelegt, wobei viele Beispiele behilflich sein sollen.

1.1 Analytische Geometrie - Eine Wiederholung

In der klassischen Differentialgeometrie betrachtet man Kurven und Flächen in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ bzw. im euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$. Wir identifizieren den $\mathbb{E}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ als Vektorraum mit einem innerem Produkt, dem Skalarprodukt. Sei

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

ein Vektor, wobei $n = 2, 3$.

Das *Skalarprodukt* (*inneres Produkt*) ist für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert durch:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

damit kann man eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definieren, der die Länge eines Vektors x angibt:

$$|x| = \sqrt{x \cdot x},$$

sowie den Abstand zweier Punkte

$$d(x, y) = \left|x - y\right|$$

und den Winkel α, der von zwei Vektoren aufgespannt wird

$$\cos\alpha = \frac{x \cdot y}{|x| \left|y\right|}.$$

Für $x, y \neq 0$ gilt damit $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn x orthogonal zu y ist.

Im $\mathbb{R}^3$ definieren wir außerdem das *Vektorprodukt* (*äußere Produkt*) durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},$$

wobei $e_1 = (1, 0, 0)^T$ usw. Die folgenden Eigenschaften kann man leicht nachrechnen:

(*i*) $x \times y = -y \times x$.

(*ii*) $x \times y = 0$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

(*iii*) $(x \times y) \cdot x = 0$ und $(x \times y) \cdot y = 0$, d.h. $x \times y \neq 0$ ist orthogonal zu x und y.

(*iv*) $\left|x \times y\right| = |x| \left|y\right| \sin \measuredangle(x, y)$.
$\Rightarrow$ $x \times y$ ist ein Vektor, der orthogonal zu der von x und y aufgespannten Ebene ist und seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Ein weiteres Produkt im $\mathbb{R}^3$ ist das *Spatprodukt*

$$(xyz) = x \cdot (y \times z)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Der Name ergibt sich aus der Eigenschaft, dass $\left|(xyz)\right|$ = Volumen des von x, y und z aufgespannten Prismas (Spat) ist.

1.2 Kurven und ihre Bogenlänge

1.2.1 Parametrisierungen

Im folgenden steht I für beliebige Intervalle, also für zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition. *Eine parametrisierte Kurve ist eine glatte (beliebig oft differenzierbare) Abbildung* $c \colon I \to \mathbb{R}^n$*,* $n \geq 2$*. Dabei heißt* t *Parameter der Kurve und ihr Bild* $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ *heißt Spur.*

In der Physik beschreibt eine parametrisierte Kurve c eine Bewegung: t ist die Zeit und $c(t)$ ein bewegtes Objekt (Massenpunkt).

Definition. (*i*) *Ist* $c = c(t)$ *eine Kurve, so heißt* $c'(t) = (c_1'(t), \ldots, c_n'(t))$ *Tangentialvektor.*
(*ii*) *Die parametrisierte Kurve* c *heißt reguläre Kurve, wenn* $c'(t) \neq 0$ *für alle* $t \in I$ *ist.*

In der physikalischen Interpretation ist der Tangentialvektor $c'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung.
Beispiele ebener Kurven $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

1. Der *Einheitskreis* ist die Spur der regulären Kurve $c(t) := (\cos t, \sin t)$, der Parameter t ist der Winkel mit der positiven x-Achse.

2. Die Spur von $c(t) := (\sin t, \sin 2t)$ ist die *Figur acht* oder *Lemniskate*.

3. $c(t) = (t, f(t))$ mit einer differenzierbaren Funktion f ist der Graph der Funktion.
Jeder Funktionsgraph ist eine parametrisierte Kurve. Die Umkehrung gilt jedoch nicht!

4. $c(t) := (t^3, t^3)$ hat als Spur die Diagonale von $\mathbb{R}^2$. Die Kurve ist jedoch nicht regulär, denn $c'(0) = 0$.

Definition. *Eine Parametertransformation ist ein glatter Diffeomorphismus* $\varphi \colon I \to \tilde{I}$ *von Intervallen, d.h. eine glatte Abbildung deren Umkehrabbildung existiert und auch glatt ist. Man nennt dann* $\tilde{c} := c \circ \varphi$ *eine Umparametrisierung von* c*. Ist* $\varphi' > 0$*, so nennt man die Umparametrisierung orientierungserhaltend.*

Beispiele. 1. Die mit verschiedenem Durchlaufsinn durchlaufenen Kreise $(\cos t, \sin t)$ und $(\cos t, -\sin t)$ stellen dieselbe Kurve, aber verschiedene orientierte Kurven dar.
2. Die Kreise $c_i(t) := (\cos t, \sin t)$ für $c_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $c_2\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ stellen verschiedene Kurven dar, denn die Anzahl der Urbilder ändert sich unter Umparametrisierung.

Bemerkungen. 1. Im Allgemeinen identifiziert man eine Kurve mit einer ihrer Parametrisierungen.
2. Wir wollen explizit erwähnen, dass unsere Kurven Selbstschnitte haben können. Ein Beispiel ist die oben angegebene Lemniskate. Manchmal betrachtet man spezieller eingebettete (d.h. injektive) Kurven.
3. Reguläre Kurven haben in jedem Punkt genau einen Tangentialvektor.

1.2.2 Die Bogenlänge

Als erste Eigenschaft von Kurven, die unabhängig vom Repräsentanten (d.h. ihrer Parametrisierung) ist, führen wir ein:

Definition. *Die (Bogen-)Länge einer Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch*

$$L(c) = \int_I |c'(t)|\, dt \qquad \in [0, \infty]. \tag{1.1}$$

Bemerkungen. 1. Das Integral ist die kontinuierliche Version von:
„zurückgelegter Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“.
2. Falls I kompakt ist, kann man das Integral abschätzen und es gilt $L(c) < \infty$. Anderenfalls ist L uneigentliches Integral und möglicherweise $L(c) = \infty$.

Wir zeigen direkt, dass die Länge einer Kurve von der Wahl der Parametrisierung unabhängig ist, da die Längenintegrale (1.1) von $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} = c \circ \varphi\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ übereinstimmen:

$$L(c) = \int_I \left|c'(s)\right| ds \overset{\text{Substitution}}{=} \int_{\tilde{I}} \left|c'(\varphi(t))\varphi'(t)\right| dt \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{I}} \left|(c \circ \varphi)'(t)\right| dt = L(\tilde{c})$$

Wir dürfen also auch $L = L(\Gamma)$ schreiben.

Beispiele. 1. Eine *Helix* oder *Schraubenlinie* mit Ganghöhe $2\pi h \in \mathbb{R}$ und Radius $r > 0$ wird durch

$$c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = (r\cos t, r\sin t, ht),$$

parametrisiert. Wegen $c'(t) = (-r\sin t, r\cos t, h)$ hat sie die Länge

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2}\, dt = (b - a)\sqrt{r^2 + h^2}\,.$$

2. Die *Ellipse* mit Halbachsen $a, b > 0$,

$$c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

hat die Geschwindigkeit $|c'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Ihre Länge bzw. ihr Umfang

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

ist nicht elementar integrierbar (*elliptisches Integral*), es sei denn es ist $a = b$, wenn die Ellipse ein Kreis mit Umfang $L(c) = 2\pi a$ ist.

Auf die folgende Parameterdarstellung werden wir häufig zurückgreifen:

Satz 1. *Es sei* $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine reguläre Parametrisierung einer orientierte Kurve* Γ *der Länge* $L := L(\Gamma) \in [0,\infty]$. *Dann gibt es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus* $\varphi\colon [0,L] \to [a,b]$, *so dass der Repräsentant* $\tilde{c} := c \circ \varphi\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$ *von* Γ *nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. es gilt* $|\tilde{c}'| = 1$.

Beispiel. Der Kreis vom Radius $r > 0$ wird durch $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})$ nach Bogenlänge parametrisiert, denn $|c'(t)| = \left|(-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})\right| = 1$.

Beweis. Wir betrachten die Länge der Kurve $c|_{[a,s]}$,

$$\ell\colon [a,b] \to [0,L], \qquad \ell(s) := \int_a^s |c'(\sigma)|\, d\sigma.$$

Wegen c regulär gilt $\ell'(s) = |c'(s)| > 0$. Daher existiert die Umkehrfunktion $\varphi := \ell^{-1}$ und φ ist ableitbar mit

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\ell'(\varphi(t))} = \frac{1}{|c'(\varphi(t))|} > 0.$$

Daraus folgt wie gewünscht

$$\left|(c \circ \varphi)'(t)\right| = \left|c'(\varphi(t))\varphi'(t)\right| = 1.$$

□

Bemerkung. Zwar ist der Satz einfach zu beweisen, aber dennoch lässt sich in der Praxis oft die Bogenlängen-Parametrisierung nicht explizit angeben, z.B. für Ellipsen.

1.3 Krümmung von Kurven

Der Krümmungsbegriff für ebene Kurven soll folgenden *Postulaten* genügen:

1. Eine Gerade soll Krümmung 0 haben. Ein positiv durchlaufener Kreis vom Radius r soll die Krümmung $1/r$ haben, ein negative durchlaufener $-1/r$.
2. Eine allgemeine Kurve soll als Krümmung im Punkt $c(t)$ die Krümmung eines "best-approximierenden" Kreises haben.

Wenn dies so ist, dann ist das *Grundpostulat der Differentialgeometrie* erfüllt:

3. Differentialgeometrische Begriffe sind invariant unter Umparametrisierungen. Sie sind auch invariant unter Drehungen und Translationen des $\mathbb{R}^n$.

1.3.1 Nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurven

Wir wollen zunächst die Normalenabbildung einer Kurve definieren, ohne Bogenlängenparametrisierung zu verlangen:

Definition. *Es sei* Γ *eine orientierte ebene Kurve, die durch eine reguläre Kurve* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *repräsentiert sei. Ihre Normale* $\nu\colon I \to \mathbb{R}^2$ *wählen wir so, dass die Vektoren* $(\frac{c'}{|c'|}, \nu)$ *in jedem Punkt der Kurve eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden.*

Die Normale erfüllt also $|\nu(t)| = 1$, $\langle \nu(t), c'(t)\rangle = 0$ und $\det(c', \nu) > 0$.

Um eine Formel für die Normale anzugeben, führen wir die orientierte 90-Grad-Drehung ein, also die lineare Abbildung

$$J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dabei soll der Buchstabe J an die Multiplikation mit i erinnern; entsprechend gilt auch $J^2 = -E_2$. Wir erfüllen die Definition von ν, indem wir setzen

$$\nu = J \cdot \frac{c'}{|c'|}.$$

Wenn Γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\nu = Jc'$. Aus unserer Darstellung folgt, dass das Normalenfeld $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{S}^1$ einer orientierten Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt ist und stetig ist.

Bei einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve gilt (einfache, aber wichtige Rechnung!):

$$\langle c'', c'\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\langle c', c'\rangle}_{\equiv 1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c'' \perp c' \quad \Leftrightarrow \quad c'' \parallel \nu$$

`2. Vorlesung, Montag 25.10.10`

Weil c'' und ν linear abhängig sind, können wir folgende Definition für die Krümmung angeben:

Definition. *Eine ebene orientierte Kurve Γ sei repräsentiert durch eine Parametrisierung nach Bogenlänge $c\colon I \to \mathbb{R}^2$. Ihre Krümmung $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ ist erklärt durch*

$$c''(t) = \kappa(t)\nu(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa(t) = \langle \nu(t), c''(t)\rangle = \langle Jc'(t), c''(t)\rangle. \tag{1.2}$$

Wir verstehen κ als *Kippgeschwindigkeit des Tangentenvektors*. Deutet man c als Bewegung eines Massepunktes mit Einheitsgeschwindigkeit, so ist c'' natürlich die Größe der Beschleunigung des Massenpunktes. Die Krümmung der Bahnkurve ist die Wirkung dieser Beschleunigung, bzw. der dazu proportionalen Kraft mc''. Wir prüfen Postulat 1 nach:

Beispiele. 1. Für die Gerade $c(t) = t\nu + b$ mit $\nu \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}^2$, gilt $c'' \equiv 0$, also auch $\kappa \equiv 0$.

2. Es sei $r \neq 0$. Dann parametrisiert

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) := \Big(r\cos\frac{t}{r},\, r\sin\frac{t}{r}\Big).$$

einen Kreis vom Radius $|r|$ nach Bogenlänge. Das Vorzeichen von r unterscheidet die Orientierung: Für $r > 0$ mathematisch positiv, für $r < 0$ im Uhrzeigersinn. Wegen

$$c'(t) = \Big(-\sin\frac{t}{r},\, \cos\frac{t}{r}\Big) \quad \Rightarrow \quad \nu = Jc'(t) = \Big(-\cos\frac{t}{r},\, -\sin\frac{t}{r}\Big) = -\frac{1}{r}c(t) \tag{1.3}$$

erhält der mathematisch durchlaufene Kreis die innere Normale, der im Uhrzeigersinn durchlaufene die äußere. Vergleichen wir nun

$$c''(t) = \Big(-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r},\, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}\Big) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

mit (1.3), so finden wir $c'' = \frac{1}{r}\nu$, d.h.

$$\kappa \equiv \frac{1}{r}.$$

Insbesondere hat der mathematische Kreis positive Krümmung.

Bemerkung. Das Vorzeichen der Krümmung ist positiv in Linkskurven, negativ in Rechtskurven. Wenn wir die Orientierung wechseln, also statt c die Kurve $\tilde{c}(t) := c(b-t)$ betrachten, so wechselt die Krümmung ihr Vorzeichen.

Da die Normale die um 90 Grad rotierte Tangente ist, stimmen die Kippgeschwindigkeiten beider Vektoren überein und man kann die Krümmung genausogut durch die *Kippgeschwindigkeit der Normalen* charakterisieren:

Satz 2. *Eine ebene orientierte Kurve* Γ *sei repräsentiert durch eine Parametrisierung nach Bogenlänge* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *und habe die Normale* ν*. Dann gilt*

$$\nu'(t) = -\kappa(t)c'(t), \tag{1.4}$$

bzw. das System von Differentialgleichungen für die Spaltenvektoren c, ν*,*

$$(c'', \nu') = (c', \nu)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Beweis. Wir differenzieren $\nu = Jc'$ und erhalten

$$\nu' = (Jc')' = Jc'' = \kappa J\nu = \kappa J^2 c' = -\kappa c'.$$ □

Das autonome Differentialgleichungssystem (1.5) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer ebenen Kurve.

1.3.2 Reguläre ebene Kurven

Viele Kurven lassen sich nicht explizit nach Bogenlänge parametrisieren. Daher benötigt man eine Formel für die Krümmung regulärer Kurven. Wir setzen nun Postulat 3, die Parametrisierungsinvarianz des Krümmungsbegriffs, ein.

Satz 3. *Die Krümmung* $\kappa(t)$ *einer ebenen orientierten Kurve* Γ*, gegeben durch eine reguläre Parametrisierung* c*, ist*

$$\kappa(t) = \frac{1}{|c'(t)|^3}\langle Jc'(t), c''(t)\rangle = \frac{1}{|c'(t)|^3}\det(c'(t), c''(t)). \tag{1.6}$$

Beweis. Im Folgenden schreiben wir kurz c für $c(t)$. Es sei $\tilde{c} := c \circ \varphi$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge. Nach Ketten- und Produktregel ist

$$\tilde{c}' = (c' \circ \varphi)\varphi', \qquad \tilde{c}'' = (c'' \circ \varphi)\varphi'^{\,2} + (c' \circ \varphi)\varphi''. \tag{1.7}$$

Wegen $\langle Jc', c'\rangle = 0$ folgt gemäß Postulat 3

$$\kappa \circ \varphi = \tilde{\kappa} = \langle J\tilde{c}', \tilde{c}''\rangle = \langle Jc' \circ \varphi, c'' \circ \varphi\rangle\varphi'^{\,3}$$

Aber der Betrag von (1.7) liefert $1 = |c' \circ \varphi|\varphi'$, so dass wir insgesamt den ersten Ausdruck von (1.6) erhalten.

Es bleibt noch die zweite Formel zu zeigen. Für jedes Paar von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\langle Jv, w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det(v, w),$$ □

1.3.3 Raumkurven

Kurven $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ in höherer Dimension $n \geq 3$ bezeichnen wir als *Raumkurven*, wenn wir sie von ebenen Kurven unterscheiden wollen.

Wir nehmen im folgenden an, dass $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, $|c'| \equiv 1$. Dann gilt auch für Raumkurven $0 = \frac{d}{dt}|c'|^2 = 2\langle c', c''\rangle$, so dass $c'' \perp c'$.

Definition. *Die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch*

$$\kappa\colon I \to [0, \infty), \qquad \kappa(t) := |c''(t)|.$$

Wir bezeichnen $c''(t)$ auch als Krümmungsvektor. Falls $c''(t) \neq 0$ definieren wir als Normale

$$\nu(t) := \frac{c''(t)}{|c''(t)|}.$$

Kurven, für die $\kappa(t) \neq 0$ für alle t gilt, nennt man Frenet-Kurven.
Ein Kurvenpunkt $c(t)$ mit $\kappa(t) = 0$ heißt Wendepunkt.

Dieser Krümmungsbegriff ist unorientiert, und stets größer gleich Null, und invariant gegenüber der Änderung des Durchlaufsinns. Man kann offenbar im Raum nicht zwischen “Links-” und “Rechts-”Kurven unterscheiden. Bildet man den Betrag der Krümmung einer ebenen Kurve, so erhält man die entsprechende Krümmung als Raumkurve.

Beispiel. Die Raumkurve $c(t) := (t, t^3, 0)$ besitzt in 0 keinen Normalenvektor; die einseitigen Grenzwerte sind verschieden für diesen Punkt. Sie ist keine Frenet-Kurve.

Wir betrachten im Rest des Abschnitts den Fall $n = 3$ und setzen stets $\kappa(t) \neq 0$ voraus. Wir ergänzen die Vektoren $c'(t)$ und $\nu(t)$ durch die *Binormale*

$$b(t) := c'(t) \times \nu(t).$$

Das Ergebnis ist eine orientierte Orthonormalbasis $(c'(t), \nu(t), b(t))$ für jedes $t \in I$, die man *begleitendes Dreibein* oder *Frenet'sches Dreibein* von c im Punkt $c(t)$ nennt.

Definition. *Die von $c'(t)$ und $\nu(t)$ aufgespannte Ebene heißt Schmiegebene, sie ist gegeben durch ihren Normalenvektor $b(t)$:*

$$(x - c(t)) \cdot b(t) = 0.$$

Bemerkungen. Interpretationen der Schmiegebene

1. Sie ist die Ebene, in der die Kurve näherungsweise liegt.
2. Sie ist die Grenzlage einer Ebene durch drei Kurvenpunkte.
3. Für ebene Kurven ist die Schmiegebene gerade die Ebene, in der sie liegt.

Wenn man Raumkurven betrachtet, fragt man sich in Abgrenzung zu ebenen Kurven: Wie stark weicht die Kurve lokal von einer ebenen Kurve ab? Das heißt, wie schnell ändert sich die Schmiegebene? Diese Abweichung kann man durch die Änderung der Binormalen messen:

$$b'(t) = \big(c'(t) \times \nu(t)\big)' = c''(t) \times \nu(t) + c'(t) \times \nu'(t) = c'(t) \times \nu'(t).$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass $b'(t)$ orthogonal zu $c'(t)$ ist. Da $b(t)$ ein Einheitsvektor ist, folgt $b'(t) \cdot b(t) = 0$. Somit ist $b'(t)$ ein Vielfaches der Normalen:

$$b'(t) = -\tau(t)\nu(t).$$

Definition. *Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ einer nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $c''(t) \neq 0$, d.h. ohne Wendepunkte. Die Größe*

$$\tau(t) = \langle -\nu(t), b'(t)\rangle$$

heißt Torsion oder Windung der Kurve.

Die Torsion verschwindet genau dann, wenn die Kurve eben ist. Sie mißt, wie stark die Kurve von einer ebenen Kurve abweicht, d.h. wie stark ν um c' dreht. Man sagt auch, die Torsion misst die Drehgeschwindigkeit der Schmiegebene $\operatorname{span}\{c'(t), \nu(t)\}$.

Beispiel. Jede Helix $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$, $r > 0$, $h \in \mathbb{R}$, hat konstante Krümmung und Torsion. Dies folgt auch daraus, daß diese Begriffe invariant unter Bewegungen sind, und Schraubbewegungen transitiv auf der Helix operieren.

Wie im ebenen Falle erhält man ein Differentialgleichungssystem:

Satz 4. *Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Dann erfüllt das Dreibein (c', ν, b) von Spaltenvektoren das Differentialgleichungssystem*

$$(c'', \nu', b') = (c', \nu, b)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Den Beweis lassen wir als Übung.

Das autonome lineare System (1.8) nennt man auch die *Frenet-Gleichungen* einer Raumkurve. Entsprechende Differentialgleichungssysteme erhält man auch für den Fall $n \geq 4$.

Die Lösung der Frenet-Gleichung führt zum *Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie*:

Satz 5. *Zu gegebenen differenzierbaren Funktionen $\kappa > 0$ und $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ gibt es stets eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit Krümmung κ und Torsion τ. Die Kurve ist durch die Funktionen κ und τ bis auf ihre Lage im Raum eindeutig bestimmt.*

Beispiele. 1. $\kappa =$ konst. und $\tau =$ konst., dann ist c eine Schraubenlinie.

2. $\kappa(t) = \frac{t}{a^2}$, $\tau = 0$, führt zu Klothoiden (siehe Übung).

Wie ermittelt man Krümmung und Torsion bei einer allgemeinen Kurve?

Satz 6. *Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine beliebige parametrisierte Kurve mit nicht verschwindender Krümmung. Dann gilt:*

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \times c''(t)|}{|c'(t)|^3}$$
$$\tau(t) = \frac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{|c'(t) \times c''(t)|^2}$$

Beweis. Wir beweisen hier nur die Formel für die Krümmung, der andere Teil des Satzes wird in den Übungen behandelt.

Sei $c(t) = \tilde{c}(\varphi(t))$ die beliebig parametrisierte Kurve und $\tilde{c}$ ihre Parametrisierung nach Bogenlänge. Wir berechnen die Ableitungen

$$c' = (\tilde{c}' \circ \varphi)\varphi', \quad c'' = (\tilde{c}'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (\tilde{c}' \circ \varphi)\varphi'' = (\tilde{\kappa} \circ \varphi)(\tilde{\nu} \circ \varphi)(\varphi')^2 + (\tilde{c}' \circ \varphi)\varphi''$$

und setzen ein

$$\left|c' \times c''\right| = \left|(\tilde{c}' \circ \varphi)\varphi' \times ((\tilde{\kappa} \circ \varphi)(\tilde{\nu} \circ \varphi)(\varphi')^2 + (\tilde{c}' \circ \varphi)\varphi'')\right| = \tilde{\kappa} \circ \varphi(\varphi')^3 \underbrace{\left|\tilde{c}' \circ \varphi \times \tilde{\nu} \circ \varphi\right|}_{=1} = \kappa \cdot (\varphi')^3.$$

Mit $1 = \left|(\tilde{c}' \circ \varphi)\right| = \frac{|c'|}{\varphi'}$ folgt die Behauptung. □

3. Vorlesung, Montag 01.11.10

2 Lokale Flächentheorie

Im zweiten Teil der Vorlesung wenden wir uns der Geometrie von Flächen zu. Wir studieren lokale Eigenschaften, dabei stehen Kurven auf Flächen und Krümmungen im Vordergrund.

2.1 Parametrisierte Flächen und Flächenkurven

Im folgenden Abschnitt verwenden wir U als Bezeichnung fr eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die (weg-) zusammenhängend ist. Solch eine Teilmenge heißt *(Parameter-) Gebiet*. Die Punkte $x \in U$ schreiben wir häufig als $x = (x^1, x^2)$.

Ein Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ist zum Beispiel ein Gebiet.

Definition. *Ein parametrisiertes Flächenstück ist eine differenzierbare Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^3$. Die reellen Variablen x^1, x^2 in U heißen Parameter von f, das Bild $f(U)$ heißt Spur von f.*

$$f(x^1, x^2) = (f_1(x^1, x^2), f_2(x^1, x^2), f_3(x^1, x^2)).$$

Ist $x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in U$ ein fester Punkt, so heißen die Kurven $x^1 \mapsto f(x^1, x_0^2)$ und $x^2 \mapsto f(x_0^1, x^2)$ x^1- bzw. x^2-Parameterlinien von f durch $f(x_0^1, x_0^2)$.

Notation. Wir kürzen die partielle Ableitungen häufig ab:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x^1, x^2) = f_{x^i} = \partial_i f.$$

Sie sind gleichzeitig die Tangentialvektoren an die Parameterlinien.

Beispiele. 1. Die Kugeloberfläche kann man durch folgende Parametrisierung darstellen:

$$f(x^1, x^2) = (r \cos x^1 \sin x^2, r \sin x^1 \sin x^2, r \cos x^2),$$

wobei $(x^1, x^2) \in U = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
2. Der Zylinder mit Radius $r > 0$, Höhe 1 und z-Achse als Drehachse wird durch

$$f(x^1, x^2) = (r \cos x^1, r \sin x^1, x^2)$$

dargestellt, $U = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Für die partiellen Ableitungen ergibt sich:

$$f_{x^1} = (-r \sin x^1, r \cos x^1, 0), \quad f_{x^2} = (0, 0, 1).$$

Definition. *Ein parametrisiertes Flächenstück heißt regulär, falls*

$$(f_{x^1} \times f_{x^2})(x) \neq 0$$

für alle $x \in U$ gilt. Punkte in denen $(f_{x^1} \times f_{x^2})(x) = 0$ gilt, heißen singuläre Punkte.

Beispiele. 1. Die Parametrisierung der Kugelfläche ist singulär für $x^2 = 0$ und $x^2 = \pi$, denn

$$\begin{aligned} f_{x^1}(x^1, x^2) &= (-r\sin x^1 \sin x^2, r\cos x^1 \sin x^2, 0) \\ f_{x^2}(x^1, x^2) &= (r\cos x^1 \cos x^2, r\sin x^1 \cos x^2, -r\sin x^2) \\ (f_{x^1} \times f_{x^2})(x^1, x^2) &= -r\sin x^2 f(x^1, x^2) \\ \left|f_{x^1} \times f_{x^2}\right| &= \left|r^2 \sin x^2\right|. \end{aligned}$$

2. Alle Punkte sind regulär, da $\partial_1 f \times \partial_2 f = (r\cos x, -r\sin x, 0) \neq 0$.
3. Der *Graph* einer (Höhen-) Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x^1, x^2) = (x^1, x^2, h(x^1, x^2)).$$

Jeder Funktionsgraph ist eine regulär parametrisierte Fläche, denn

$$\begin{aligned} f_{x^1}(x^1, x^2) &= (1, 0, \partial_1 h(x^1, x^2)) \\ f_{x^2}(x^1, x^2) &= (0, 1, \partial_2 h(x^1, x^2)) \\ (f_{x^1} \times f_{x^2})(x^1, x^2) &= (-\partial_1 h(x^1, x^2), -\partial_2 h(x^1, x^2), 1) \\ \left|f_{x^1} \times f_{x^2}\right| &= \sqrt{1 + (\partial_1 h)^2 + (\partial_2 h)^2} \neq 0. \end{aligned}$$

Die obere Halbkugel mit Radius 1 ergibt sich durch $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Definition. *Eine Fläche $\tilde{f}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ heißt Umparametrisierung der Fläche $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, falls es eine Parametertransformation $\varphi\colon \tilde{U} \to U$ gibt, so dass*

$$f(\varphi(x^1, x^2)) = \tilde{f}(x^1, x^2)$$

und

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(x^1, x^2) & \partial_2\varphi_1(x^1, x^2) \\ \partial_1\varphi_2(x^1, x^2) & \partial_2\varphi_2(x^1, x^2) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beispiel. Die obere Halbkugel $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ kann man auch mit Hilfe von Polarkoordinaten darstellen. Dazu setzt man

$$x = r\cos\alpha \text{ und } y = r\sin\alpha$$

und erhält $(r\cos\alpha, r\sin\alpha, \sqrt{1 - r^2})$ für $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le r \le 1)$.

Um die singulären Punkte dieser Parametrisierung zu bestimmen, berechnen wir die Funktionaldeterminante

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} = r.$$

Daraus folgt, die neue Parametrisierung ist singulär für $r = 0$.

Bemerkung. Die geometrischen Eigenschaften der Fläche hängen nicht von der gewählten Parametrisierung ab. In der Kurventheorie haben wir eine ausgezeichnete Parametrisierung gewählt, dies hier nicht möglich! Das heißt wir müssen bei der Längen-, Winkel- und Flächenmessung die Parametrisierung beachten.

Definition. *Sei $\gamma\colon I \to U$ eine Kurve im Parametergebiet U, dann heißt $c := f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ Flächenkurve.*

Um Flächenkurven zu untersuchen, betrachten wir sie als Raumkurven. Um die Ableitung der Flächenkurve zu bestimmen, benutzt man die Kettenformel:

$$c'(t) = \partial_1 f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \partial_2 f(\gamma(t))\gamma_2'(t),$$

die Ableitung ist eine Linearkombination der Tangentialvektoren der Parameterlinien.

Notation. Tritt in einem Ausdruck derselbe Index einmal als oberer und einmal als unterer Index auf, so ist über ihn von 1 bis 2 zu summieren:

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{2} a_i b^i.$$

Diese Schreibweise geht auf Albert Einstein zurück und heißt deshalb *Einsteinsche Summenkonvention*.

Die Ableitung lässt sich damit verkürzt notieren:

$$c'(t) = \partial_i f(\gamma(t))\gamma_i'(t).$$

Definition. *Der Flächennormalenvektor (kurz auch die Flächennormale) im Punkt $f(x^1, x^2)$ ist gegeben durch*

$$\nu(x^1, x^2) = \frac{\partial_1 f(x^1, x^2) \times \partial_2 f(x^1, x^2)}{\left|\partial_1 f(x^1, x^2) \times \partial_2 f(x^1, x^2)\right|}.$$

Damit kann man für Flächen das Gaußsche begleitende Dreibein angeben

$$\partial_1 f(x^1, x^2),\ \partial_2 f(x^1, x^2),\ \nu(x^1, x^2).$$

Die Tangentialebene im Punkt $f(x^1, x^2)$ wird durch die beiden Tangentialvektoren aufgespannt

$$\{f(x^1, x^2) + \lambda_1 \partial_1 f(x^1, x^2) + \lambda_2 \partial_2 f(x^1, x^2) \colon \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Man kann sie auch implizit in Normalform mit der Flächennormalen angeben

$$(y - f(x^1, x^2))\nu = 0.$$

2.2 Metrik - Erste Fundamentalform

Im folgenden sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2) \mapsto f(x^1, x^2)$ eine parametrisierte Fläche. Wir betrachten eine Flächenkurve $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $\gamma\colon I \to U$ gegeben ist

$$c(t) = f(\gamma(t)).$$

Um die Länge der Flächenkurve zu berechnen, benutzen wir die Definition aus dem ersten Teil der Vorlesung

$$l_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \left|c'(s)\right| \mathrm{d}\, s = \int_{t_0}^{t} \left|\partial_i f(\gamma(s))\gamma_i'(s)\right| \mathrm{d}\, s$$

In Summenkonvention ergibt sich für die Länge des Vektors

$$\left|\partial_i f(\gamma(s))\gamma_i'(s)\right| = \sqrt{\partial_i f(\gamma(s))\gamma_i'(s) \cdot \partial_j f(\gamma(s))\gamma_j'(s)} = \sqrt{\partial_i f \cdot \partial_j f \gamma_i'(s)\gamma_j'(s)}.$$

Zusammen also

$$l_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\partial_i f \cdot \partial_j f \gamma_i'(s)\gamma_j'(s)}\,\mathrm{d}\,s.$$

Der vordere Teil des Integranden hängt von der parametrisierten Fläche ab und der hintere von der Flächenkurve.

Definition. *Die Größen $g_{ij} = \partial_i f \cdot \partial_j f$ heißen metrische Fundamentalgrößen der Fläche. Die Größen sind die koordinatenabhängigen Einträge der ersten Fundamentalform*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Sie ist ein Maß für die Verzerrung der Parametrisierung, entspricht also einer Metrik auf der Fläche. Oftmals wird sie auch durch

$$\mathrm{d}\,s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j$$

notiert.

Bemerkungen. 1. Die erste Fundamentalform ist symmetrisch: $g_{ij} = g_{ji}$.
2. In der älteren Literatur findet man auch die Bezeichnungen

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

3. Ihre Determinante $\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ heißt *Gramsche Determinante*, mit ihr kann man Oberflächenintegrale berechnen.

Beispiele. 1. Die Ebene: $f(x^1, x^2) = (x^1, x^2, 0)$ in Polarkoordinaten $f(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$.
2. Die Kugel $f(x^1, x^2) = (r\cos x^1 \sin x^2, r\sin x^1 \sin x^2, r\cos x^2)$.

Die erste Fundamentalform einer Fläche erlaubt Längen-, Winkel- und Inhaltsmessungen. Die Länge einer Flächenkurve $c = f(\gamma)$ verkürzt sich zu:

$$l_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\gamma_i'}.$$

Beispiel. Wir betrachten auf der Kugeloberfläche $f(x^1, x^2) = (r\cos x^1 \sin x^2, r\sin x^1 \sin x^2, r\cos x^2)$ die Kurve $\gamma(t) = \left(\ln\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}), \frac{\pi}{2} - t\right)$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. Sie hat eine endliche Länge.

`4. Vorlesung, Montag 08.11.10`

Auch bei der Winkelmessung tritt die erste Fundamentalform als Verzerrungsmaß der Fläche auf. Wir betrachten zwei Kurven $c(t) = f(\gamma(t))$ und $d(t) = f(\delta(t))$ auf einer Fläche $f(U)$. Die beiden Kurven schneiden sich in einem Punkt $p \in f(U)$, d.h. es gibt $t_0, \tilde{t}_0 \in \mathbb{R}$ mit $c(t_0) = d(\tilde{t}_0)$. Um den Winkel zu messen, den die Kurven im Punkt p einschließen, betrachten wir die beiden Tangentialvektoren der Kurven im Punkt p. Es gilt

$$c'(t) = \partial_i f(\gamma(t))\gamma_i', \quad d'(t) = \partial_j f(\delta(t))\delta_j'.$$

Für den Winkel α, den die beiden Vektoren einschließen, gilt nach Definition

$$\cos\alpha = \frac{c' \cdot d'}{|c'|\,|d'|} = \frac{\partial_i f \gamma_i' \cdot \partial_j f \delta_j'}{\sqrt{(\partial_i f \cdot \partial_j f)\gamma_i'\gamma_j'}\,\sqrt{(\partial_i f \cdot \partial_j f)\delta_i'\delta_j'}},$$

da $c(t_0) = d(\tilde{t}_0)$ können wir die erste Fundamentalform einsetzen:

$$\cos\alpha = \frac{g_{ij}\gamma_i'\delta_j'}{\sqrt{g_{ij}\gamma_i'\gamma_j'}\,\sqrt{g_{ij}\delta_i'\delta_j'}}. \tag{2.1}$$

Beispiele. 1. Die Kurve $\gamma(t) = \left(\ln\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}), \frac{\pi}{2} - t\right)$ auf der Kugel schneidet die Breitenkreise der Kugel in einem konstanten Winkel. Siehe Übung.
2. Der Winkel zwischen den Parameterlinien einer Fläche: $\gamma(t) = (t, y_0)$ und $\delta(s) = (x_0, s)$ für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest. Für die Ableitungen ergibt sich $\gamma'(t) = (1, 0)$ und $\delta'(s) = (0, 1)$. Und dementsprechend für den Winkel

$$\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{22}}}.$$

Das heißt, das Netz der Parameterlinien ist genau dann orthogonal, wenn $g_{12} = 0$.

Eine weitere Größe von Flächen für die wir uns interessieren, ist der Flächeninhalt. Wir betrachten eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $V \subset U$ mit stückweise glattem Rand und $f\colon V \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir interessieren uns für den Flächeninhalt $A(f(V))$. Die Größe

$$\left|\partial_1 f(x^1, x^2) \times \partial_2 f(x^1, x^2)\right| \tag{2.2}$$

heißt *Oberflächenelement*. Das Integral über das Oberflächenelement ergibt den Flächeninhalt von $f(V)$:

$$A(f(V)) = \iint\limits_V \left|\partial_1 f(x^1, x^2) \times \partial_2 f(x^1, x^2)\right| \mathrm{d}\,x^1 \,\mathrm{d}\,x^2.$$

Das Oberflächenelement ist gleich der Determinante der ersten Fundamentalform, d.h.

$$A(f(V)) = \iint\limits_V \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}\,x^1\,\mathrm{d}\,x^2.$$

Beispiele. 1. Der Flächeninhalt der zweidimensionalen Ebene $f(x, y) = (x, y, 0)$ ist nicht endlich, da

$$A(\mathbb{R}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = +\infty.$$

2. Für den Flächeninhalt des Zylinders $f(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$, $V = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ ergibt sich

$$A(f(V)) = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 4\pi.$$

Satz 7. *Der Flächeninhalt ist von der gewählten Parametrisierung unabhängig.*

Beweis. Sei $V \subset U$ eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge mit stückweise glattem Rand und $f\colon V \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei $\tilde{f} := f \circ \varphi\colon \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to f(U) \subset \mathbb{R}^3$ eine andere Parametrisierung mit $f(U) \subset \tilde{f}(\tilde{U})$ und $\tilde{V} := \tilde{f}^{-1}(f(V))$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
A(\tilde{f}(\tilde{V})) &= \iint\limits_{\tilde{V}} \left|\partial_1 \tilde{f} \times \partial_2 \tilde{f}\right| \mathrm{d}\, x^1 \,\mathrm{d}\, x^2 \\
&= \iint\limits_{\tilde{V}} \left|\partial_1 (f \circ \varphi) \times \partial_2 (f \circ \varphi)\right| \left|\det \mathrm{d}\,\varphi\right| \mathrm{d}\, x^1 \,\mathrm{d}\, x^2 \\
&= \iint\limits_{V} \left|\partial_1 f \times \partial_2 f\right| \mathrm{d}\, x^1 \,\mathrm{d}\, x^2 = A(f(V))
\end{aligned}
$$

□

Beispiel. Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche beträgt $4\pi r^2$.

2.3 Flächenkrümmung

Wir wollen zuerst die Krümmung von Kurven in Flächen untersuchen. Dazu sei $\gamma\colon (a, b) \to U$ eine Kurve und $c := f \circ \gamma$. Wir nehmen an, dass c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Die Krümmung κ der Kurve ist durch die zweite Ableitung gegeben:

$$c''(t) = \kappa(t) \cdot n(t).$$

Es ist natürlich die Krümmung zu zerlegen: Sie setzt sich einerseits aus der Krümmung der Fläche (Normalkrümmung κ_n) und andererseits aus der Krümmung der Kurve in der Fläche (geodätische Krümmung κ_g) zusammen. Diese Zerlegung lässt sich auch mathematisch beschreiben: Wie oben sei

$$\nu = \frac{\partial_1 f \times \partial_2 f}{\left|\partial_1 f \times \partial_2 f\right|}$$

die Flächennormale, s bezeichnet die normierte Projektion der Kurvennormale n auf die Tangentialebene, dann gilt

$$c'' = c''^{\top} + c''^{\perp} = c''^{\top} + \langle c'', \nu \circ \gamma \rangle (\nu \circ \gamma) = \kappa_g s + \kappa_n \nu = \kappa n. \tag{2.3}$$

Da $s \perp \nu$ gilt der Satz des Pythagoras $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ und daraus folgt

$$\left|\kappa_g\right| = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2}.$$

Beispiele. 1. Jede Kurve in der Ebene hat nur geodätische Krümmung.
2. Ein Großkreis in der Sphäre ist eine Kurve, die nur Normalkrümmung besitzt; für alle anderen Kreise in der Sphäre gilt das nicht.

Bemerkung. Kurven mit $\kappa_g \equiv 0$ heißen geodätische Flächenkurven, sie sind lokal kürzeste Kurven.

Wir können für die Normalkrümmung schreiben:

$$\kappa_n := \langle c'', \nu \circ \gamma \rangle \overset{\langle c', \nu \rangle = 0}{=} -\big\langle c', (\nu \circ \gamma)' \big\rangle = -\big\langle \partial_i f \gamma_i', \partial_j \nu \gamma_j' \big\rangle \tag{2.4}$$

Dies führt uns auf die genauere Untersuchung des Differentials $\partial_j \nu$ der Normal-Abbildung.

Wenn wir in U längs einer Kurve $\gamma(t)$ laufen, wie ändert sich dann die Flächennormale $\nu \circ \gamma$? Auf jeden Fall ist $\partial_j \nu \gamma_j'$ tangential, da

$$0 = \langle \nu \circ \gamma, \nu \circ \gamma \rangle' = 2 \langle \partial_j \nu \gamma_j', \nu \circ \gamma \rangle.$$

Um die Änderung der Normalen näher zu untersuchen, ist es nützlich, eine Matrix zu definieren, mit der man leichter rechnen kann:

Definition. *Die zweite Fundamentalform ist definiert durch*

$$b_{ij} = -\Big\langle \partial_i \nu, \partial_j f \Big\rangle = \Big\langle \nu, \partial_{ij}^2 f \Big\rangle. \tag{2.5}$$

Nach dem Schwarzschen Lemma vertauschen zweite partielle Ableitungen und b ist deshalb eine symmetrische Matrix.

Satz 8 (Meusnier)**.** *Es sei ein Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit Flächennormale ν gegeben. Die Normalkrümmung* (2.4) *jeder nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c ist bereits durch die Tangentenrichtung c' und die Daten g, $\partial_j \nu$ der Fläche f bestimmt:*

$$\kappa_n(t) = \frac{b_{ij} \gamma_i' \gamma_j'}{g_{ij} \gamma_i' \gamma_j'}. \tag{2.6}$$

Beispiel. Wir betrachten den Graphen der Funktion $h(x, y) = xy$, also $f(x, y) = (x, y, xy)$. Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\partial_x f = (1, 0, y), \quad \partial_y f = (0, 1, x),$$

$$\partial_{xx} f = (0, 0, 0) = \partial_{yy} f, \quad \partial_{xy} f = (0, 0, 1).$$

Die Normale ergibt sich aus den ersten partiellen Ableitungen

$$\nu = \frac{\partial_x f \times \partial_y f}{\big|\partial_x f \times \partial_y f\big|} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(-y, x, 1).$$

Damit können wir die erste und zweite Fundamentalformen angeben:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & xy \\ xy & 1 + x^2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Flächenkurve $\gamma(t) = (1 + t, 1 - t)$. Für die Krümmungen ergibt sich im Punkt $t = 0$

$$\kappa(0) = 1, \quad \kappa_n(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \big|\kappa_g(0)\big| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5. Vorlesung, Montag 15.11.10

Wir haben gesehen, dass für jeden Punkt p einer Fläche und jede Richtung $\gamma' = V \in \mathbb{R}^2$ eine Normalkrümmung gegeben ist. Um die Fläche genauer zu untersuchen, fragt man sich, für welche Richtungen die Normalkrümmung κ_n maximal bzw. minimal wird. Diese Krümmungen nennt man *Hauptkrümmungen*, die dazugehörigen Richtungen heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

Um die Hauptkrümmungen und ihre Hauptkrümmungsrichtungen in einem festen Punkt zu bestimmen müssen wir die folgenden Extremwertaufgaben lösen:

$$\max \text{ bzw. } \min \frac{b_{ij}V^iV^j}{g_{ij}V^iV^j} \quad \text{für } V = (V^1, V^2) \neq (0,0).$$

Das ist jedoch äquivalent zu

$$\max \text{ bzw. } \min b_{ij}V^iV^j \quad \text{für } g_{ij}V^iV^j = 1.$$

Wir müssen also eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen lösen. Dazu benutzen wir Lagrange-Multiplikatoren. Wir betrachten die folgende Hilfsfunktion

$$\Lambda(V^1, V^2, \lambda) = b_{ij}V^iV^j + \lambda(g_{ij}V^iV^j - 1)$$

und setzen ihre partiellen Ableitungen gleich Null:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial V^1} &= 2b_{11}V^1 + 2b_{12}V^2 + 2\lambda(g_{11}V^1 + g_{12}V^2) = 0 \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial V^2} &= 2b_{12}V^1 + 2b_{22}V^2 + 2\lambda(g_{12}V^1 + g_{22}V^2) = 0 \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= g_{ij}V^iV^j - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Durch Umformungen ergibt sich folgende Definition:

Definition. *Die Hauptkrümmungen (Extremwerte der Normalkrümmung) sind die Lösungen $\lambda \in \mathbb{R}$ von*

$$\det g\lambda^2 - (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11})\lambda + \det b = 0.$$

Wir bezeichnen die Lösungen mit κ_1, κ_2. Die zugehörigen Richtungen V und W sind die nicht-trivialen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}
(b_{j1} - \kappa_1 g_{j1})V^1 &= 0 \\
(b_{j2} - \kappa_1 g_{j2})V^2 &= 0 \\
(b_{j1} - \kappa_2 g_{j1})W^1 &= 0 \\
(b_{j2} - \kappa_2 g_{j2})W^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Beispiele. 1. Auf dem Zylinder $f(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$ mit $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind beide Koordinatenrichtungen Hauptkrümmungsrichtungen, und zwar zu den Hauptkrümmungen 1 bzw. 0.

2. Im Punkt $(0,0)$ des hyperbolischen Paraboloids $f(x,y) = (x,y,xy)$ gilt

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Diagonalen $e_1 \pm e_2$ sind die Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt $(0,0)$, und ± 1 ihre Hauptkrümmungen.

3. Die Fälle $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{S}^2_r$ sind degeneriert: Hier ist jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung mit Hauptkrümmung 0 bzw. $\frac{1}{r}$. Gleiches gilt auch in höherer Dimension.

Bemerkung. Flächenpunkte mit $\kappa_1 = \kappa_2$ heißen *Nabelpunkte*. Alle Punkte der Sphäre sind Nabelpunkte.

Satz 9. *Die Hauptkrümmungen sind von der gewählten Parametrisierung unabhängig.*

2.3.1 Gauß- und mittlere Krümmung

Definition. *Es sei (f,ν) ein auf U parametrisiertes Flächenstück. Für $p \in U$ seien $\kappa_1(p)$, $\kappa_2(p)$ die Hauptkrümmungen und $v_1(p)$, $v_2(p)$ die Hauptkrümmungsrichtungen. Die Gauß-Krümmung K ist das Produkt der Hauptkrümmungen, die mittlere Krümmung H ihr Mittelwert,*

$$K(p) := \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p), \qquad H(p) := \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$

Bemerkung. Laut Satz 9 sind die Hauptkrümmungen κ_i von der gewählten Parametrisierung unabhängig; entsprechendes gilt auch für H und K. Die Gauß-Krümmung K ist eine Größe der inneren Geometrie. Bei Wechsel der Normalen ändert H ihr Vorzeichen, aber K ändert das Vorzeichen nicht. Innere Geometrie bedeutet, die Information steckt in der Fläche allein und ist vom umgebenden Raum unabhängig. Dies ist Inhalt des Gaußschen *theorema egregium*.

Satz 10. *Die Gaußsche Krümmung K hängt nur von der Metrik g ab.*

Beispiele. 1. Das Zylinderstück mit innerer Normale hat konstante Hauptkrümmungen 0 und 1. Also gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$.

2. Auf dem hyperbolischen Paraboloid hat man $\kappa_{1,2}(0,0) = \pm 1$. Daher ist $K(0,0) = -1$, $H(0,0) = 0$.

3. Für die Kugeloberfläche mit innerer Normale gilt $K \equiv (\frac{1}{r})^2$, $H \equiv \frac{1}{r}$; für $\mathbb{R}^n$ ist $K \equiv 0$, $H \equiv 0$.

Man kann auch lokale Darstellungen für H und K angeben, mit denen man sie gewöhnlich ausrechnet:

Satz 11. *Gauß- und mittlere Krümmung haben die Darstellung*

$$K = \frac{\det b}{\det g}, \qquad H = \frac{1}{2 \det g}(g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22}).$$

Beispiel. Das hyperbolische Paraboloid $f(u,v) = (u,v,uv)$.

2.4 Geodätische

Geodäten sind spezielle Flächenkurven, die wir durch ihre Eigenschaften beschreiben:

- Die Normale n einer Geodäten ist in jedem Punkt der Kurve parallel zur Flächennormalen ν. Die geodätische Krümmung κ_g misst den tangentialen Anteil der Kurvenkrümmung κ, daraus folgt, dass die geodätische Krümmung verschwindet. Da in
$$c'' = \kappa n = \kappa_g s + \kappa_n \nu, \quad \text{siehe 2.3}$$
der tangentiale Anteil von der Kurvennormalen (also s) verschwindet und damit gilt
$$\kappa n = \kappa_n \nu, \quad \text{also } |\kappa| = |\kappa_n|\,.$$
Andererseits gilt aber auch $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$, zusammen ergibt sich also
$$\kappa_g = 0.$$
- Eine Geodäte ist *lokal* die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten p_1 und p_2 auf einer Fläche. Lokal heißt hier, dass die Kurve nur leicht, also in einer kleinen Umgebung, gestört werden darf. Bei hinreichend nah benachbarten Punkten p_1 und p_2 verbindet eine Geodäte auf kürzestem Weg und ist eindeutig bestimmt:

  Die Länge einer Kurve berechnet sich durch
$$l(c) = \int_{t_1}^{t_2} \left|c'(t)\right| \mathrm{d}\, t,$$
unter allen regulären Kurven mit $c(t_1) = p_1, c(t_2) = p_2$ minimiert die geodätische Kurve $c_g(t)$ die Länge:
$$\int_{t_1}^{t_2} \left|c_g'(t)\right| \mathrm{d}\, t \leq \int_{t_1}^{t_2} \left|c'(t)\right| \mathrm{d}\, t.$$

Beispiele. 1. Ebene
2. Zylinder
3. Kugeloberfläche

2.4.1 Satz von Gauß-Bonnet

Die geodätische Krümmung ist nicht nur bei der Betrachtung der Geodäten von Interesse, sie kommt unter anderem im *Satz von Gauß-Bonnet* vor. Dieser wichtige Satz stellt eine Verbindung zwischen der Geometrie einer Fläche und ihrer Topologie also den Eigenschaften, die unter Verformungen gleich bleiben, her. Wir betrachten hier nur einen Spezialfall.

Dazu sei $f(x, y), (x, y) \in \Omega$ eine Parametrisierung eines *einfach zusammenhängenden* regulären Flächenstücks über einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass die Randkurve $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Die Raumkurve $f(\partial\Omega) =: c$ sei ebenfalls zweimal stetig differenzierbar. Insbesondere können wir von der Randkurve c der Fläche in jedem Punkt die geodätische Krümmung $\kappa_g(t)$ bestimmen, wobei wir annehmen, dass $c(t)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Satz 12. *Für ein wie oben parametrisiertes einfach zusammenhängendes Flächenstück gilt die Integralformel von Gauß und Bonnet:*

$$\iint_{\Omega} K(x,y) \underbrace{\left|\partial_1 f(x^1,x^2) \times \partial_2 f(x^1,x^2)\right|}_{=:W(x,y)} \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y + \oint_{\partial\Omega} \kappa_g(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\pi.$$

Das heißt die Summe der Gaußschen Gesamtkrümmung eines Flächenstücks und der geodätischen Gesamtkrümmung seiner Randkurve ist gleich 2π. Für das Oberflächenelement aus 2.2 schreiben wir kurz $W(x,y)$.

Beispiel. Kugeloberfläche

Wir haben oben vorausgesetzt, dass die Randkurve $\partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbar ist. Der Satz gilt aber auch allgemeiner für stückweise glatte Kurven. In diesem Fall ändert sich die Kurventangente sprunghaft in den Ecken und die geodätische Krümmung ist undefiniert, deshalb werden die Richtungssprünge dem Randintegral hinzugefügt.

Satz 13. *Wir betrachten ein einfach zusammenhängendes Flächenstück wie oben, dessen Randbogen R_i aus N zweimal stetig differenzierbaren Bögen bestehe, die in den N Ecken e_i unter den Außenwinkeln α_i, wobei $-\pi < \alpha_i < \pi$, aneinanderstoßen. Dann gilt folgende Integralformel*

$$\iint_{\Omega} K(x,y)W(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \oint_{\partial\Omega} \kappa_g(t)\,\mathrm{d}\,t + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 2\pi.$$

Beispiel. Ebene

Das Beispiel lässt sich auf allgemeine Geodätische übertragen.

Bemerkung. Sind die Randbögen R_i Geodätische, so verschwindet die geodätische Krümmung entlang $\partial\Omega$. Es gilt dann

$$\iint_{\Omega} K(x,y)W(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 2\pi.$$

Da das Oberflächenelement immer positiv ist, lässt sich also ein Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Gauß-Krümmung und den Winkeln eines geodätischen Vielecks herstellen. Wir betrachten geodätische Dreiecke ($N = 3$), also Dreiecke, deren Seiten Geodäten sind und anstelle der Außenwinkel α_i die Innenwinkel β_i:

$$\beta_i = \pi - \alpha_i.$$

Dann gilt

$$\iint_{\Omega} KW\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 3\pi - \sum_{i=1}^{3} \beta_i = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \iint_{\Omega} KW\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \sum_{i=1}^{3} \beta_i - \pi.$$

Damit kann man die drei grundlegenden Geometrien unterscheiden:

(*i*) *Euklidische Geometrie*: Es ist $K = 0$, die Innenwinkelsumme ist gleich π.

(*ii*) *Hyperbolische Geometrie*: Es ist $K < 0$, die Innenwinkelsumme ist kleiner als π.

(*iii*) *Sphärische Geometrie*: Es ist $K > 0$, die Innenwinkelsumme ist größer als π.

Abschließend geben wir noch eine Darstellung der geodätischen Krümmung für eine Flächenkurve $f(\gamma(t)) = c(t)$ an:

$$\kappa_g(t) = \frac{\nu(\gamma(t)) \cdot (c'(t) \times c''(t))}{|c'(t)|^3}.$$

3 Abbildungen von Flächen - Kartenentwürfe

3.1 Längentreue, Winkeltreue, Flächentreue

Wir betrachten zwei parametrisierte Flächen mit übereinstimmendem Parametergebiet U:

$$f\colon U \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto f(x,y)$$
$$\bar{f}\colon U \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto \bar{f}(x,y)$$

Die gemeinsamen Parameter (x,y) definieren eine Abbildung zwischen den Flächen $F = f(U)$ und $\bar{F} = \bar{f}(U)$

$$\Phi\colon F \to \bar{F}, f(x,y) \mapsto \bar{f}(x,y).$$

Die Flächen F und $\bar{F}$ sind durch gleiche Parameter aufeinander bezogen.

Beispiel. Ebene und Zyliner

Im letzten Teil der Vorlesung untersuchen wir, wann eine Abbildung zwischen zwei Flächen

- längentreu, d.h. Kurven in U sind unter f und $\bar{f}$ gleich lang.
- winkeltreu, d.h. einander entsprechende Winkel auf beiden Flächen sind gleich.
- flächentreu, d.h. entsprechende Flächenstücke sind einander gleich.

Definition. *Die Abbildung $\Phi\colon F \to \bar{F}$ heißt isometrisch (längentreu), falls $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$.*

In diesem Fall stimmen nach dem theorema egregium die Gaußschen Krümmungen überein, d.h. die Flächen sind aufeinander abwickelbar. Falls die Abbildung nicht isometrisch ist, treten Längenverzerrungen auf. Die Längenverzerrung ist in allen Richtung gleich, falls es eine Abbildung $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$ gibt, mit $g_{ij}(x,y) = \lambda(x,y)\bar{g}_{ij}(x,y)$.

Definition. *Die Abbildung $\Phi\colon F \to \bar{F}$ heißt konform (winkeltreu), falls die Koeffizienten der Metriken proportional zueinander sind: $g_{ij} = \alpha\bar{g}_{ij}$.*

Man sieht leicht, dass Winkel unter Φ erhalten bleiben: Aus dem zweiten Teil der Vorlesung (siehe Gleichung 2.1) wissen wir, dass der Winkel zwischen zwei Flächenkurven $c(t) = f(\gamma(t))$ und $d(t) = f(\delta(t))$ gegeben ist durch

$$\cos\alpha = \frac{g_{ij}\gamma'_i\delta'_j}{\sqrt{g_{ij}\gamma'_i\gamma'_j}\sqrt{g_{ij}\delta'_i\delta'_j}}.$$

Ersetzt man nun g_{ij} durch $\bar{g}_{ij}$, ergibt sich

$$\cos\alpha = \cos\bar{\alpha}$$

für den entsprechenden Winkel $\bar{\alpha}$ auf $\bar{F}$.

Wir haben gesehen, dass der Flächeninhalt durch das Oberflächenelement $W = \sqrt{\det g}$ gegeben ist, daher ist die Flächenverzerrung der Abbildung Φ gegeben durch

$$\frac{W}{\bar{W}} = \frac{\sqrt{\det g}}{\sqrt{\det \bar{g}}}.$$

Definition. *Die Abbildung $\Phi \colon F \to \bar{F}$ heißt flächentreu (inhaltstreu), falls*

$$\det g = \det \bar{g}.$$

Bemerkung.
- Isometrische Abbildungen sind sowohl konform als auch flächentreu.
- Andererseits ist eine Abbildung, die konform und flächentreu ist, auch isometrisch.

Satz 14. *Nur Flächen mit Gaußkrümmung $K = 0$ lassen sich isometrisch in die Ebene abbilden.*

Beweis. Die gesuchte Fläche muss laut Definition die gleiche Fundamentalform wie die Ebene haben. Da die Gaußkrümmung nur von der ersten Fundamentalform abhängt (theorema egregium), gilt $K = 0$. □

Korollar 15. *Die Kugeloberfläche lässt sich nicht isometrisch auf die Ebene abbilden.*

Beispiel. Katenoid und Helikoid.

3.2 Kartenentwürfe

Wir wollen nun verschiedene Beispiele von Karten der Erdoberfläche untersuchen. Dabei nehmen wir an, dass die Erde eine Kugel ist und vernachlässigen die Ellipsoidgestalt. Damit ist ein Kartenentwurf eine Abbildung zwischen zwei Flächen: der Kugeloberfläche K und der Ebene E.

Wie wir gesehen haben, gibt es keine isometrische Abbildung der Kugeloberfläche auf die Ebene.

3.2.1 Stereographische Projektion

Bei der stereographischen Projektion werden die Kugelpunkte durch Zentralprojektion von einem Punkt $p \in K$ auf die Tangentialebene in $-p$ abgebildet.

Wir wählen die Standarddarstellung der Kugeloberfläche

$$f(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \sin y, \cos y)$$

und stellen die Ebene in Polarkoordinaten dar

$$\bar{f}(x, y) = (2 \tan \frac{y}{2} \cos x, 2 \tan \frac{y}{2} \sin x, 1).$$

Die entsprechenden Metriken sind

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2 y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} 4 \tan^2 \frac{y}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^4 \frac{y}{2}} \end{pmatrix}.$$

Die stereographische Projektion Φ projeziert vom Südpol $(-1, 0, 0)$ der Kugel auf die Tangentialebene im Nordpol und ist gegeben durch

$$f(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \sin y, \cos y) \mapsto \bar{f}(x, y) = (2 \tan \frac{y}{2} \cos x, 2 \tan \frac{y}{2} \sin x, 1).$$

Für die Metriken gilt

$$g_{ij} = \underbrace{\cos^4 \frac{y}{2}}_{=:\lambda(x,y)} \bar{g}_{ij},$$

das heißt die Abbildung Φ ist konform/winkeltreu. Da λ nur von y abhängt, sieht man schnell, dass die Breitenkreise $f(x, y_0)$ für festes y_0 auf gestreckte Kreise in der Ebene abgebildet werden. Dabei werden die Breitenkreise nah am Südpol unendlich lang und solche, die sich dem Nordpol nähern, immer kleiner.

3.2.2 Mercator-Entwurf

Der Mercator-Entwurf ist nach seinem Erfinder, dem Kartographen Gerhard Mercator (lat. Name für Gerhard Kremer) benannt. Es handelt sich dabei um einen Zylinder-Entwurf, das heißt die Kugeloberfläche wird zunächst auf einen Zylinder abgebildet, der dann in die Ebene abgewickelt wird. Die Ebene wird dabei durch

$$\bar{f}(x, y) = (x \ln \cot \frac{y}{2}, 0)$$

dargestellt. Das Bild der Kugeloberfläche $\bar{f}([0, 2\pi], [0, \pi])$ wird auf den Streifen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi\}$$

abgebildet. Die Längen- und Breitenkreise gehen auf Parallelen der Koordinatenachsen. Für die Metrik ergibt sich

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 y} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$g_{ij} = \underbrace{\sin^2 y}_{=:\lambda(x,y)} \bar{g}_{ij},$$

und damit ist der Mercator-Entwurf konform. Der Äquator ($y = \frac{\pi}{2}$) wird isometrisch abgebildet, da $\lambda(x, \frac{\pi}{2}) = 1$ und damit $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$ gilt. Die Längenverzerrung λ wird in Polnähe immer größer.

Eine weitere Eigenschaft des Mercartor-Entwurfs macht ihn für die Seefahrt so interessant: Die Loxodrome der Kugeloberfläche werden wegen der Winkeltreue auf Geraden abgebildet. Daher wird der Entwurf oft auch als *Seekarte* bezeichnet.

3.2.3 Entwurf von Archimedes und Lambert

Dieser Entwurf ist eine klassische Zylinder-Projektion: Die Kugeloberfläche wird horizontal auf das Zylinderstück für $-1 \leq z \leq 1$ projeziert. Nach dem Abwickeln ergibt sich folgende Parametrisierung $\bar{f}(x, y) = (x, \cos y)$. Da

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 y \end{pmatrix},$$

also $\det g = \det \bar{g}$ gilt, ist der Entwurf flächentreu.

3.2.4 Mollweidescher Entwurf

Dieser Entwurf ist ein Beispiel für einen *unechten Entwurf*, darunter versteht man Entwürfe, bei denen die Bilder der Längenkreise keine Geraden oder die Bilder der Breitenkreise keine Kreise oder Geraden sind.

Wir betrachten

$$\bar{f}(x,y) = (\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x\cos t,\ \sqrt{2}\sin t),$$

wobei

$$\pi\cos y := 2t + \sin 2t$$

bzw. $y = \arccos(\frac{1}{\pi}(2t + \sin 2t)]$ gilt. Das Bild der Kugeloberfläche ist eine Ellipse mit den Hauptachsen $2\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$. Die Bilder der Längenkreise sind Ellipsen mit Scheitel $(0, \pm\sqrt{2})$. Der Mollweidesche Entwurf ist flächentreu.