

Differentialgeometrie für Vermessungswesen 6. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Julia Plehnert
Alexander Schmieg

WS 2010/11
24.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rotationsfläche der Traktrix)

Wir betrachten die Traktrix

$$(r, h)(t) := \left(\frac{1}{\cosh t}, t - \tanh t \right) \quad \text{für } t > 0$$

und untersuchen nun die von ihr erzeugte Rotationsfläche $f(t, \phi) = (r(t) \cos \phi, r(t) \sin \phi, h(t))$.

- Berechnen Sie die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 dieser Fläche.
- Zeigen Sie nun, dass die Innenwinkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf der Fläche immer kleiner als π ist.

Aufgabe G2 (Ebene Kurven)

Sei $c(t)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c(t) = f(\gamma(t))$. Zeigen Sie unter Verwendung der Frenet-Gleichungen aus Satz 4 der Vorlesung, dass die geodätische Krümmung von $c(t)$ gleich ihrer gewöhnlichen Krümmung $\kappa(t)$ ist.

Aufgabe G3 (Kugeloberfläche)

Wir betrachten die Kugeloberfläche mit Radius 1 und schneiden sie mit den Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.

- Beschreiben Sie die Kurven, die durch die Schnitte entstehen.
- Betrachten Sie ein Dreieck, das aus Teilen der drei Kurven besteht. Verifizieren Sie die allgemeine Integralformel an diesem Beispiel.
- Wie groß ist die Innenwinkelsumme des Dreiecks?

Hausübung

Aufgabe H1 (Satz von Harriot)

- Zeigen Sie den folgenden Satz:

Der Flächeninhalt $A(\Delta_g)$ eines geodätischen Dreiecks mit Innenwinkeln β_i auf der Kugeloberfläche (Radius 1) ist gleich

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi \epsilon,$$

ϵ heißt *sphärischer Exzess*.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks aus G3.
- Geben Sie den Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche mit konstanter Gauß-Krümmung $K = -1$ an.

Aufgabe H2 (Erdoberfläche)

Berechnen Sie Flächeninhalt des geodätischen Dreiecks mit den Eckpunkten Darmstadt, Berlin und London. Vergleichen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks mit dem der ganzen Erdoberfläche (Erdradius 6371 km).

Eckpunkt	Innenwinkel
Darmstadt	115,634°
Berlin	38,248°
London	26,297°