

# Differentialgeometrie für Vermessungswesen 5. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Julia Plehnert  
Alexander Schmiege

WS 2010/11  
17.11.2010

## Gruppenübung

### Aufgabe G1 (Klassifizierung von Flächenpunkten)

Wir nennen einen Flächenpunkt  $p$

- *elliptisch*, falls  $K(p) > 0$ ,
- *parabolisch*, falls  $K(p) = 0$ ,
- *hyperbolisch*, falls  $K(p) < 0$ .

Geben Sie jeweils zwei Beispiele für Flächen an, deren Punkte stets elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch sind.

### Aufgabe G2 (Ellipsoid)

Durch

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ 2 \sin u \cos v \\ 3 \sin v \end{pmatrix}, \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

ist eine Parametrisierung eines Ellipsoids gegeben.

- Bestimmen Sie die Normalkrümmung, sowie die geodätische Krümmung der durch  $\gamma(t) = (t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  gegebenen Flächenkurve im Punkt  $\gamma(\pi)$ .
- Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen im Punkt  $f(\pi, \pi)$ .
- Bestimmen Sie außerdem die Gauß- und mittlere Krümmung im Punkt  $f(\pi, \pi)$ .

### Aufgabe G3 (Torus)

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen des Torus:

$$f(x, y) = ((2 + \cos x) \cos y, (2 + \cos x) \sin y, \sin x), \quad x, y \in [0, 2\pi],$$

(vgl. Aufgabe G2, 3. & 4. Übung) in einem allgemeinen Flächenpunkt  $f(x, y)$ .

## Hausübung

### Aufgabe H1 (Torus)

Bestimmen Sie die Gauß- und mittlere Krümmung des in G3 definierten Torus. Welche Punkte sind elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch? Erklären Sie das Ergebnis auch anschaulich.

### Aufgabe H2 (Krümmungsberechnung)

Veranschaulichen Sie sich die folgende Fläche

$$f(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$$

und berechnen Sie die mittlere Krümmung, die Gaußsche Krümmung sowie die Hauptkrümmungen im Punkt  $f(0, 0)$ .