# Differentialgeometrie für Vermessungswesen 4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Julia Plehnert**
Alexander Schmieg

**WS 2010/11**
**10.11.2010**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Graphen)
Eine Fläche sei durch $z = h(x, y)$ gegeben. Berechnen Sie die erste Fundamentalform und leiten Sie daraus die Formel für den Flächeninhalt her:

$$A(f(V)) = \iint_V \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y.$$

**Aufgabe G2** (Loxodrome)
Die Standard-Parametrisierung einer Kugel mit Radius $r$ um den Ursprung lautet

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Eine Loxodrome ist eine Kurve auf der Kugel, deren Winkel zu den Parameterlinien von $f$ konstant ist.

(a) Betrachten wir speziell die Erdkugel. Identifizieren Sie die Parameterlinien von $f$ mit Längen- und Breitenkreisen. Wie erhält man den Äquator, Nord- und Südpol? Diskutieren Sie die Bedeutung von Loxodromen für die Schifffahrt.

(b) Sei

$$c(t) = (u(t), v(t)) = (\ln \cot(\pi/4 - t/2), t), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Skizzieren Sie die Koordinatenfunktion $u(t)$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Flächenkurve $f \circ c$ um eine Loxodrome mit Richtung "Nord-Ost" handelt.

**Aufgabe G3** (Torus)
Durch

$$((2 + \cos x) \cos y, (2 + \cos x) \sin y, \sin x),\ x, y \in [0, 2\pi],$$

ist eine Parametrisierung eines Torus gegeben, vgl. Aufgabe G2, 3. Übung.

(a) Unter welchem Winkel treffen sich die Parameterlinien?

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Torus.

(c) Schneidet die durch $\gamma(t) = (t, t)$ gegebene Kurve auf dem Torus die $x$-Linien unter konstantem Winkel?

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Katenoid)
Durch

$$f(x,y) = (\cosh y \cos x, \cosh y \sin x, y)$$

ist eine Parametrisierung des Katenoids gegeben.

(a) Skizzieren Sie das Katenoid.
*Hinweis*: Das Katenoid ist die von der Kettenlinie $c(t) = (\cosh t, t)$ erzeugte Rotationsfläche.

(b) Berechnen Sie die erste Fundamentalform des Katenoids und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe H2, 3. Übung.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $f(x,y)$ für $(x,y) \in [0,2\pi] \times [0,1]$.

(d) Zeigen Sie, dass die Flächenkurve $\gamma(t) = (t,t)$ die $x$-Linien des Katenoids unter festem Winkel schneidet und geben Sie diesen Winkel an.

**Aufgabe H2** (Sphäre)

(a) Zeigen Sie, dass für die Krümmung eines Breitenkreises auf der Kugel mit Radius 1 gilt

$$\kappa = \frac{1}{\cos\beta},$$

wobei $\beta$ die Breite ist.

(b) Warum gilt $\kappa_n = 1$?

(c) Zeigen Sie $\kappa_g = \tan\beta$.

**Aufgabe H3** (Torus)
Betrachten Sie erneut den Torus aus Aufgabe G3 und die Kurve $\gamma(t) = (t,t)$. Bestimmen Sie die Normalkrümmung, sowie die geodätische Krümmung im Punkt $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$.