Differentialgeometrie für Vermessungswesen 3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Julia Plehnert
Alexander Schmieg

WS 2010/11
03.11.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Drehparaboloid)

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für das durch

$$z = x^2 + y^2$$

gegebene Drehparaboloid an und bestimmen Sie den Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$, der zu $(x, y) = (1, 2)$ gehört.

(b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangentialebene in p_0 an.

(c) Geben Sie diese Ebene durch eine implizite Gleichung an.

Aufgabe G2 (Torus)

(a) In der xz-Ebene ist ein Kreis gegeben durch $(R + r\cos\phi, 0, r\sin\phi)$, $R > r$. Skizzieren Sie diesen.

(b) Drehen Sie den Kreis um die z-Achse mit Hilfe der Rotationsmatrix $\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und geben Sie für den so entstehenden Torus eine Parameterdarstellung $f(\psi, \phi)$ an.

(c) Bestimmen Sie den Punkt $p = f(\frac{\pi}{2}, 0)$.

(d) Berechnen Sie das begleitende Dreibein in p.

(e) Beschreiben Sie die $\psi-$ und $\phi-$ Linien in Worten und Formeln.

(f) Skizzieren Sie die $\psi-$ und $\phi-$ Linien durch p und das begleitende Dreibein in p.

Aufgabe G3 (Zylinder)

Eine Parameterdarstellung des Zylinders über dem Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ist $f(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$, $(x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform des Zylinders und vergleichen Sie diese mit der ersten Fundamentalform der Ebene.

(b) Durch $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, \pi]$ ist eine Schraublinie als Flächenkurve auf dem Zylinder gegeben. Berechnen Sie die Länge mit Hilfe der ersten Fundamentalform.

Hausübung

Aufgabe H1 (Zylinder)
Gegeben ist der Zylinder $(r\cos x, r\sin x, y)$, $r>0$, $(x,y)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie eine Darstellung der Flächenkurve, die im Parameterbereich durch die Gerade $\gamma(t)=(t,ct)$, $c\in\mathbb{R}$ gegeben ist. Welchen Einfluss hat der Faktor c auf die Kurve?

(b) Berechnen Sie die Tangentialvektoren dieser Kurve direkt und über die Parametrisierung der Fläche. Zeigen Sie, dass sich dasselbe ergibt.

Aufgabe H2 (Helikoid)
Durch $f(x,y)=(y\cos x, y\sin x, x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist eine Parametrisierung einer Wendelfläche bzw. des Helikoids gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Fläche mit einigen Parameterlinien.

(b) Parametrisieren Sie f durch $x=s$, $y=\sinh t$ um und bestimmen Sie die erste Fundamentalform bzgl. s und t.

Aufgabe H3 (Rotationsflächen)
Gegeben ist die Kurve $c(t)=(r(t),h(t)):[a,b]\to(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Wir legen diese Kurve in die x,z-Ebene des $\mathbb{R}^3$ und rotieren diese Kurve um die z-Achse. Dann erhält man die Rotationsfläche

$$f(t,\phi):=(r(t)\cos\phi, r(t)\sin\phi, h(t)) \quad \text{für } (t,\phi)\in[a,b]\times[0,2\pi]\ .$$

(a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform $(g_{ij})_{i,j=1,2}$ der Rotationsfläche.

(b) Mit Hilfe des Oberflächenelementes (Gramsche Determinante) kann man den Flächeninhalt wie folgt berechnen:

$$A:=\int_a^b\int_0^{2\pi}\sqrt{\det(g_{ij}(t,\phi))}\,d\phi\,dt\ .$$

Leiten Sie daraus eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes von Rotationsflächen her.

(c) Benutzen Sie die hergeleiteten Formeln, um die erste Fundamentalform und den Flächeninhalt des Torus aus Aufgabe G2 zu bestimmen.