

Differentialgeometrie für Vermessungswesen

2. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Julia Plehnert
Alexander Schmieg

WS 2010/11
27.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wendeltreppe)

Eine Wendeltreppe hat innen die Helix

$$c(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{2} \right)$$

als Handlauf (Meter als Einheit). Der äußere Handlauf ist 1m weiter außen. Um wieviel Meter ist er bei einem Umlauf ($0 \leq t \leq 2\pi$) länger als der innere?

Aufgabe G2 (Klothoide)

Die Klothoide hat die Parameterdarstellung

$$c(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} du.$$

Das Ziel der Aufgabe ist es,

$$\kappa(s) = \frac{s^2}{a}$$

zu zeigen, wobei s die Bogenlänge ist. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

- Skizzieren Sie die Kurve.
- Begründen Sie

$$c'(t) = \frac{a}{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Umparametrisierung

$$t = \frac{s^2}{2a^2}.$$

- Führen Sie die Bogenlänge als Parameter ein und begründen Sie möglichst ohne Rechnung:

$$\tilde{c}'(s) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s^2}{2a^2} \\ \sin \frac{s^2}{2a^2} \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie \tilde{c}'' und damit κ .

Aufgabe G3 (Torsion)

Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\tau(t) = \frac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{|c'(t) \times c''(t)|^2}$$

für die Torsion einer beliebig parametrisierten Kurve mit nicht verschwindender Krümmung.

Diese und weitere Übungen finden Sie auf der Veranstaltungshomepage auf den Internetseiten des Fachbereichs Mathematik: www.mathematik.tu-darmstadt.de unter Lehre und Studium → Lehrveranstaltungen → Lehrmaterial zu Vorlesungen WS 2010/2011 → Pflichtveranstaltungen für Hörer anderer Fachbereiche.

Hausübung

Aufgabe H1 (Tangente)

Gegeben ist die Kurve

$$c(t) = (t, t^2, t^3)$$

für $t \geq 0$.

- (a) Zeigen Sie, dass keine Tangente die Tangente für $t = 0$ trifft.
- (b) Berechnen Sie κ und τ .

Aufgabe H2 (Archimedische Spirale)

Die archimedische Spirale hat die Darstellung

$$c(t) = (t \cos t, t \sin t).$$

- (a) Skizzieren Sie die Kurve für $I = \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.
- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $l(t)$.
- (c) Für welches Intervall ist der Parabelbogen $\left(t, \frac{t^2}{2}\right)$ genau so lang?

Aufgabe H3 (Ebene Kurven und verschwindende Torsion)

Es sei $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve.

- (a) Ist c eben, d.h. in einer Ebene des \mathbb{R}^3 enthalten, so gilt $\tau \equiv 0$.
- (b) Zeigen Sie die Frenet-Gleichungen einer Raumkurve.
- (c) Zeigen Sie nun die Umkehrung von (a). (Was ist $\langle b, c \rangle$?)