

# Differentialgeometrie für Vermessungswesen

## 2. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Julia Plehnert  
Alexander Schmieg

WS 2010/11  
27.10.2010

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Wendeltreppe)

Eine Wendeltreppe hat innen die Helix

$$c(t) = \left( \cos t, \sin t, \frac{t}{2} \right)$$

als Handlauf (Meter als Einheit). Der äußere Handlauf ist 1m weiter außen. Um wieviel Meter ist er bei einem Umlauf ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) länger als der innere?

#### Aufgabe G2 (Klothoide)

Die Klothoide hat die Parameterdarstellung

$$c(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} du.$$

Das Ziel der Aufgabe ist es,

$$\kappa(s) = \frac{s^2}{a}$$

zu zeigen, wobei  $s$  die Bogenlänge ist. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

- Skizzieren Sie die Kurve.
- Begründen Sie

$$c'(t) = \frac{a}{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Umparametrisierung

$$t = \frac{s^2}{2a^2}.$$

- Führen Sie die Bogenlänge als Parameter ein und begründen Sie möglichst ohne Rechnung:

$$\tilde{c}'(s) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s^2}{2a^2} \\ \sin \frac{s^2}{2a^2} \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $\tilde{c}''$  und damit  $\kappa$ .

#### Aufgabe G3 (Torsion)

Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\tau(t) = \frac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{|c'(t) \times c''(t)|^2}$$

für die Torsion einer beliebig parametrisierten Kurve mit nicht verschwindender Krümmung.

Diese und weitere Übungen finden Sie auf der Veranstaltungshomepage auf den Internetseiten des Fachbereichs Mathematik: [www.mathematik.tu-darmstadt.de](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de) unter Lehre und Studium → Lehrveranstaltungen → Lehrmaterial zu Vorlesungen WS 2010/2011 → Pflichtveranstaltungen für Hörer anderer Fachbereiche.

---

## Hausübung

---

### Aufgabe H1 (Tangente)

Gegeben ist die Kurve

$$c(t) = (t, t^2, t^3)$$

für  $t \geq 0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass keine Tangente die Tangente für  $t = 0$  trifft.
- (b) Berechnen Sie  $\kappa$  und  $\tau$ .

### Aufgabe H2 (Archimedische Spirale)

Die archimedische Spirale hat die Darstellung

$$c(t) = (t \cos t, t \sin t).$$

- (a) Skizzieren Sie die Kurve für  $I = \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ .
- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge  $l(t)$ .
- (c) Für welches Intervall ist der Parabelbogen  $\left(t, \frac{t^2}{2}\right)$  genau so lang?

### Aufgabe H3 (Ebene Kurven und verschwindende Torsion)

Es sei  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve.

- (a) Ist  $c$  eben, d.h. in einer Ebene des  $\mathbb{R}^3$  enthalten, so gilt  $\tau \equiv 0$ .
- (b) Zeigen Sie die Frenet-Gleichungen einer Raumkurve.
- (c) Zeigen Sie nun die Umkehrung von (a). (Was ist  $\langle b, c \rangle$ ?)