Differentialgeometrie für Vermessungswesen 1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Julia Plehnert
Alexander Schmieg

WS 2010/11
20.10.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Analytische Geometrie)
Es seien $a = (2, 8, 0)$, $b = (9, 1, 9)$ und $c = (6, 8, 0)$.

(a) Bestimmen Sie $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $|c|$, $a \times b$, (abc) und $\measuredangle(a, b)$.

(b) Sind a, b und c linear unabhängig?

(c) Bestimmen Sie das Volumen des von a, b und c aufgespannten Prismas.

Aufgabe G2 (Tangentialvektoren an den Kreis)
Berechnen Sie den Tangentialvektor im Punkt t an den Kreis

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Fertigen Sie eine Skizze der Kurve an und tragen Sie die Vektoren $c'(0)$, $c'(\frac{\pi}{2})$, $c'(\pi)$ und $c'(\frac{3\pi}{2})$ ein. Was fällt auf?

Aufgabe G3 (Umparametrisierung)
Welche Parametrisierungen repräsentieren dieselbe orientierte Kurve?

$$\begin{aligned}
c_1(t) &:= (\cos t, \sin t) \quad , t \in (0, \pi) \\
c_2(t) &:= (\cos^2 t - \sin^2 t, 2 \sin t \cos t) \quad , t \in (0, \pi) \\
c_3(t) &:= (t, \sqrt{1 - t^2}) \quad , t \in (-1, 1) \\
c_4(t) &:= \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right) \quad , t \in (-\infty, +\infty)
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Analytische Geometrie)
Es seien $a = (3, 1, 4)$, $b = (1, 5, 9)$ und $c = (2, 6, 9)$.

(a) Bestimmen Sie $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $|c|$, $a \times b$, (abc) und $\measuredangle(a, b)$.

(b) Sind a, b und c linear unabhängig?

(c) Bestimmen Sie das Volumen des von a, b und c aufgespannten Prismas.

Aufgabe H2 (Polarkoordinaten und Kardioide)
Gegeben sei eine Kurve der Form

$$c(t) = \big(r(t) \cos t, r(t) \sin t\big), \quad t \in I.$$

(a) Bestimmen Sie $|c'(t)|$. Welche Bedingung muss die Funktion r erfüllen, damit c regulär ist?

(b) Sei nun speziell $r(t) = 1 + \cos t$ und $I = [0, \infty)$. Skizzieren sie die Spur der Kurve, berechnen Sie die Länge $L(c)$ und geben Sie die Parametrisierung $\tilde{c}$ von $[c]$ nach der Bogenlänge an.

Aufgabe H3 (Flächeninhalt)
Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, regulär parametrisierte Kurve. Gemäß dem Greenschen Integralsatz in der Ebene gilt für den (orientierten) Flächeninhalt des von der Spur von c berandeten Gebiets

$$A(c) = \int_a^b c(t) \cdot Pc'(t)\, dt, \quad P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Der Flächeninhalt ist unter orientierungserhaltenden Umparametrisierung invariant, d.h. $A(c) = A(c \circ \varphi)$ für $\varphi' > 0$.

(b) Der Flächeninhalt ist translationsinvariant, d.h. $A(c) = A(c + p)$ für konstante Vektoren $p \in \mathbb{R}^2$.

(c) Der Flächeninhalt ist rotationsinvariant, d.h. $A(c) = A(Rc)$ für Rotationsmatrizen $R \in SO(2)$.