Lineare Algebra I
15. Tutorium
Determinante

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
15. Februar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Permutationen)
Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge der Inversionen von σ.

(b) Schreiben Sie σ als Zusammensetzung von disjunkten Zyklen.

(c) Schreiben Sie σ als Zusammensetzung von Transpositionen.

(d) Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Lösung:

(a) Die Menge der Inversionen von σ ist

$$\{(1,2),(1,4),(1,6),(1,7),(1,9),(2,6),(2,7),(3,4),(3,6),(3,7),(3,9),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(5,9),(8,9)\}$$

(b) Es gilt

$$\sigma = (1\ \ 6) \circ (2\ \ 3\ \ 7) \circ (5\ \ 8\ \ 9).$$

(c) Wegen

$$\begin{aligned} (2\ \ 3\ \ 7) &= (2\ \ 3) \circ (3\ \ 7), \\ (5\ \ 8\ \ 9) &= (5\ \ 8) \circ (8\ \ 9) \end{aligned}$$

und der letzten Teilaufgabe ergibt sich

$$\sigma = (1\ \ 6) \circ (2\ \ 3) \circ (3\ \ 7) \circ (5\ \ 8) \circ (8\ \ 9).$$

(d) Aus Aufgabenteil (a) und der Definition des Vorzeichens einer Permutation ergibt sich

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{|I(\sigma)|} = (-1)^{17} = -1.$$

Aufgabe G2 (Determinante)

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Definition der Determinante.

(b) Ändert sich die Determinante einer Matrix, wenn man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Wie ändert sich die Determinante einer Matrix, wenn man zwei Zeilen vertauscht?

(d) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(Bringen Sie dazu die Matrix in obere Dreiecksgestalt, beachten Sie wie sich die Determinante dabei laut Aufgabenteil (b) und (c) verändert und berechnen Sie im letzten Schritt die Determinante der Matrix in oberer Dreiecksgestalt wie in der Vorlesung behandelt.)

Betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & a & 1 & 3 \\ 0 & b & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

(d) Wie groß ist die Determinante von B?

Lösung:

(a) Nach Defintion der Determinante gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(4),4} \,.$$

Ein Produkt der Gestalt $\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(4),4}$ ist nur dann ungleich Null, wenn $a_{\sigma(i),i} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, 4$ gilt. Da in der ersten Spalte der Matrix nur ein Eintrag ungleich Null ist, kann dies nur gelten, wenn $\sigma(1) = 2$ ist.

Da σ bijektiv ist, kommt in dem Produkt $a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(4),4}$ genau ein Matrixeintrag pro Zeile vor. Da in der ersten Zeile nur ein Eintrag ungleich Null ist muss $\sigma(2) = 1$ gelten, damit $\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(4),4} \neq 0$ gilt.

Für $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = 2$ und $\sigma(2) = 1$ gibt es nur die zwei Möglichkeiten

$$\sigma_1 = (1\,2) \text{ und } \sigma_2 = (1\,2)(3\,4)\,.$$

Nach einer aus der Vorlesung bekannten Formel für das Vorzeichen von Permutationen, die sich aus Transpositionen zusammensetzen ergibt sich

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = -1 \text{ und } \operatorname{sgn}(\sigma_2) = 1$$

D.h. die Summe in der Definition der Determinante ergibt sich zu

$$\det A = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot a_{\sigma_1(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma_1(4),4} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) \cdot a_{\sigma_2(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma_2(4),4} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 8$$

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Determinante eine alternierende n-lineare Abbildung ist. Insbesondere ändert sich die Determinante nicht, wenn man das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert.

Da außerdem die Determinate einer Matrix immer gleich der Determinate der transponierten Matrix ist (und das Transponieren immer gerade die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht) gilt dasselbe für Zeilen anstelle von Spalten.

Also ändert sich die Determinate einer Matrix nicht, wenn man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert.

(c) Mit derselben Argumentation wie im letzten Aufgabenteil erhält man, dass die Determinante einer Matrix das Vorzeichen wechselt, wenn man zwei Zeilen vertauscht.

(d) Mittels des Gauß-Algorithmus erhält man

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat Diagonalgestalt, ihre Determinante ist also das Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen. D.h. es gilt

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-8) = 8$$

(e) Man kann die Argumentation aus Aufgabenteil (a) genauso auf die Matrix B anwenden. Es ergeben sich dabei genau dieselben Gleichungen, d.h. es gilt

$$\det B = \det A = 8\,.$$

Aufgabe G3 (Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

(a)

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\cdot\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\cdot\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, a \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Bei den Aufgabenteilen (a)-(c) verwendet man die expliziten Formeln für 2×2 bzw. 3×3 Determinanten. Für den letzten Aufgabenteil verwendet man die Lösung der Aufgabe G2 (c).

(a)

$$\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \sin\alpha\cdot\sin\alpha - (-\cos\alpha\cdot\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(b)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} &= 1\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot 5\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 1\cdot 5\cdot 3 \\ &= -2 + 10 - 3 - 4 - 1 - 15 = -15\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\cdot\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\cdot\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot 1 + \cos\alpha\cdot(-a^2\sin\alpha)\cdot 0 + a\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot 0 \\ &\quad -a\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot 0 - \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot 1 - \sin\alpha\cdot(-a^2\sin\alpha)\cdot 0 \\ &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\end{aligned}$$

(d)

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$