Lineare Algebra I
15. Tutorium
Determinante

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

WS 2010/2011
15. Februar 2011

Aufgaben

Aufgabe G1 (Permutationen)
Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge der Inversionen von σ.

(b) Schreiben Sie σ als Zusammensetzung von disjunkten Zyklen.

(c) Schreiben Sie σ als Zusammensetzung von Transpositionen.

(d) Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Aufgabe G2 (Determinante)

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Definition der Determinante.

(b) Ändert sich die Determinante einer Matrix, wenn man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert? Zeigen Sie ihre Aussage.

(c) Wie ändert sich die Determinante einer Matrix, wenn man zwei Zeilen vertauscht?

(d) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(Bringen Sie dazu die Matrix in obere Dreiecksgestalt, beachten Sie wie sich die Determinante dabei laut Aufgabenteil (b) und (c) verändert und berechnen Sie im letzten Schritt die Determinante der Matrix in oberer Dreiecksgestalt wie in der Vorlesung behandelt.)

Betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & a & 1 & 3 \\ 0 & b & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

(d) Wie groß ist die Determinante von B?

Aufgabe G3 (Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

(a)

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\cdot\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\cdot\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, a \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$