# Lineare Algebra I
# 14. Tutorium
# Lineare Abbildungen und Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Kollross**
Dr. Le Roux
Dipl.-Math. Susanne Kürsten

**WS 2010/2011**
**7. Februar 2011**

## Aufgaben

**Aufgabe G1** (Bewegungen im $\mathbb{R}^2$)
Als Bewegung im $\mathbb{R}^2$ werden Spiegelungen, Drehungen und beliebige Zusammensetzungen von Spiegelungen und Drehungen bezeichnet.
Drehungen um den Koordinatenursprung in $\mathbb{R}^2$ und Spiegelungen an einer Gerade durch den Koordinatenursprung sind lineare Abbildungen.

(a) Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix $A$ an, sodass $\varphi = \varphi_A$ die Multiplikation mit $A$ ist.
Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter $\varphi$ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(b) Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Matrix $A_\alpha$ an, sodass $\varphi_\alpha = \varphi_{A_\alpha}$ die Multiplikation mit $A_\alpha$ ist.
Stellen Sie einige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und ihre Bilder unter $\varphi$ graphisch dar. Welche Bewegung im $\mathbb{R}^2$ wird durch diese Abbildung beschrieben?

(c) Es sei $\chi_1$ die Abbildung, welche die Spiegelung an der $x_1$-Achse beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für $\chi_1$ an (in der Form, wie sie in den Aufgabenteilen (a) und (b) gegeben ist). Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix $B_1$ mit $\chi_1 = \varphi_{B_1}$.

(d) Es sei $\chi_2$ die Abbildung, welche die Spiegelung an Gerade $x_1 = x_2$ beschreibt. Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für $\chi_2$ an. Bestimmen Sie weiterhin eine Matrix $B_2$ mit $\chi_2 = \varphi_{B_2}$.

(e) Berechenen Sie $\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1$ auf zwei Arten:
   (1) Setzen Sie die expliziten Abbildungsvorschriften ineinander ein
   (2) Multiplizieren Sie die zu den Abbildungen gehörigen Matrizen in der richtigen Reihenfolge (siehe Satz 5.5.13 aus der Vorlesung). Die zu der entstehenden Matrix gehörige Abbildung ist dann die gesuchte Zusammensetzung.

   Ergeben beide Wege wirklich dasselbe Ergebnis?
   Welche der Abbildungen aus den vorherigen Aufgaben ist diese Zusammensetzung?

**Lösung:**

(a) Die gesuchte Matrix $A$ ist offensichtlich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Abbildung linear ist reicht es sich die Bilder der Standardbasisvektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

unter $\varphi$ zu überlegen. Man erkennt, dass die Abbildung $e_1$ auf $e_2$ und $e_2$ auf $-e_1$ abbildet. Durch die graphische Darstellung sieht man, dass es sich bei $\varphi$ um eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung (in mathematisch positiver Richtung) handelt. (Die gesamte Abbildung muss diese Drehung sein, da sowohl Drehung, als auch $\varphi$ linear sind, und eine lineare Abbildung durch die Bilder einer Basis eindeutig bestimmt ist.)

(b) Die gesuchte Matrix $A$ ist offensichtlich

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A_\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ und } A_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Graphisch, bzw. unter Verwendung der bekannten Formel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ und der geometrischen Formeln

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

erkennt man, dass dies gerade einer Drehung um $\alpha$ um den Koordinatenursprung (in mathematisch positiver Richtung) ist.

(c) Es gilt offensichtlich $\chi_1(e_1) = e_1$ und $\chi_1(e_2) = -e_2$. Aus der Linearität von $\chi_1$ ergibt sich dann

$$\chi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \chi_1(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2) = x_1\chi_1(e_1) + x_2\chi_1(e_2) = x_1 \cdot e_1 - x_2 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

D.h. die explizite Abbildungsvorschrift ist

$$\chi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Matrix $B_1$ ist

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Anschaulich erkennt man, dass $\chi_2(e_1) = e_2$ und $\chi_2(e_2) = e_1$ gilt. Aus der Linearität von $\chi_2$ ergibt sich dann

$$\chi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \chi_2(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2) = x_1\chi_1(e_1) + x_2\chi_1(e_2) = x_1 \cdot e_2 + x_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

D.h. die explizite Abbildungsvorschrift ist

$$\chi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Matrix $B_2$ ist

$$B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) (1) Man berechnet explizit

$$(\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi_{\frac{\pi}{2}}\left(\chi_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi_{\frac{\pi}{2}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(2) Die Multiplikation der entsprechenden Matrizen ergibt

$$A_{\frac{\pi}{2}} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich stimmen die Ergebnisse unter (1) und (2) überein.
Außerdem erkennt man, dass

$$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \circ \chi_1 = \chi_2$$

gilt.

**Aufgabe G2** (Matrizen linearer Abbildungen bezüglich verschiedener Basen)

(a) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $B$ von $\mathbb{R}^2$ und eine Basis $C$ von $\mathbb{R}^2$, sodass die Matrix $[\varphi_1]_C^B$ der Abbildung bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix ist.

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $D$ von $\mathbb{R}^3$ und eine Basis $F$ von $\mathbb{R}^4$, sodass die Matrix $[\varphi_2]_F^D$ der Abbildung bezüglich dieser Basen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Hinweis: In der Vorlesung wurde ein Satz bewiesen, der aussagt, dass man zu jeder linearen Abbildung Basen findet, so dass die zugehörige Matrix die Identität eventuell ergänzt um einige Nullzeilen und/oder Nullspalten ist.

**Lösung:**

(a) Es gilt $\varphi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man setzt nun

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $b_1$ und $b_2$ bzw. $c_1$ und $c_2$ sind offensichtlich linear unabhängig. D.h. $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$ sind Basen von $\mathbb{R}^2$. Wegen $\varphi_1(b_1) = c_1$ und $\varphi_1(b_2) = c_2$ gilt

$$[\varphi_1]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. die gesuchten Basen sind gefunden.

(b) In dem Beweis des im Hinweis erwähnten Satzes aus der Vorlesung wird eine mögliche Konstruktion der beiden Basen angegeben. Dabei besteht $F$ aus einer Basis des Bildes von $\varphi_2$ ergänzt zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ und $D$ aus einer Basis des Kerns von $\varphi_2$ zusammen mit je einem Urbild der Basisvektoren von im $\varphi_2$ aus $F$.

Die hier gegebene Abbildung ist gerade die Abbildung $\varphi_A$ aus der Aufgabe G3 vom Tutorium 13. Aus dieser Aufgabe ist bekannt, dass das Bild von $\varphi_2$ von den Vektoren

$$f_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } f_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Die zugehörigen Urbilder sind offensichtlich

$$d_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } d_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem sieht man sofort, dass $\ker \varphi_2 = \{0\}$ gilt und der Vektor

$$f_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Vektoren $f_1, f_2, f_3$ zu einer Basis ergänzt.

Man setzt nun also

$$D := (d_1, d_2, d_3) \text{ und } F := (f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_2(d_1) &= 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4 \\ \varphi_2(d_2) &= 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4 \\ \varphi_2(d_3) &= 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4 \end{aligned}$$

folgt

$$[\varphi_2]_F^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. die gesuchten Basen sind gefunden.

**Aufgabe G3** (Basiswechsel)

Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasis

$$E = (e_1, e_2, e_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

die Matrix

$$[\varphi]_E^E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_B^B$ von $\varphi$ bezüglich der Basis

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Lösung:** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$[\varphi]_B^B = [id]_B^E \cdot [\varphi]_E^E \cdot [id]_E^B = S^{-1} \cdot [\varphi]_E^E \cdot S$$

mit der Übergangsmatrix $S = [id]_E^B$. Wegen $b_1 = e_1 - e_2 - e_3, b_2 = e_1 + e_3, b_3 = e_1 + e_2 + e_3$ und der Definition von Übergangsmatrizen gilt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von $S$ bestimmt man mit Hilfe des Gaußalgorithmus wie folgt.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III-2II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-\frac{1}{2}III \\ II+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Folglich gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}[\varphi]_B^B = S^{-1} \cdot [\varphi]_E^E \cdot S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$